III Forum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil – PUC/SP

Grupo de Discussões 11: Sobre ensino de Cálculo e Análise

Visualização e ensino de Análise Matemática

Márcia Maria Fusaro Pinto
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Resumo: O ensino de análise matemática tem sido investigado há décadas e debatido sob diferentes perspectivas teóricas. A atualidade e continuidade do debate se justifica pelos inúmeros relatos dos obstáculos enfrentados por professores e alunos em seu ensino e aprendizagem, em sua delimitação nos diferentes currículos, na conveniência ou até mesmo pertinência de seu estudo. Aqui, tenho a intenção de trazer elementos para a discussão de seu ensino e aprendizagem, referentes à visualização em matemática e seus diferentes usos, pelos alunos, para sustentar sua argumentação.

Palavras-chave: Visualização, argumentação e prova em matemática, ensino de análise matemática, educação matemática no ensino superior

1- Introdução

Em minha pesquisa de doutorado (PINTO, 1998) investiguei o processo de transição dos alunos ao iniciar o estudo da matemática formal. Este envolve usar definições, a partir das quais outras propriedades são construídas por dedução formal. Em especial, investiguei as estratégias desenvolvidas pelos alunos enquanto buscavam entender proposições quantificadas, como as que expressam a definição de limite de sequencia de números reais.

Como referência teórica importante àquela época, na área de educação matemática no ensino superior, contei com a pesquisa de Dubinsky e seus colegas (1986,1988, 1991). Eles sugerem que o processo de aprendizagem de conceitos matemáticos, e em particular aqueles com definições que são expressos como proposições quantificadas, ocorrem através de *abstração reflexiva*, em que um predicado com uma ou mais variáveis é concebido como um processo mental que é *encapsulado* em uma declaração (um objeto mental) tendo o processo de quantificação como ponto de partida.

Uma argumentação similar sobre o processo de aprendizagem de conceitos matemáticos é encontrada em Sfard (1991). Ela destaca que concepções de definições matemáticas como objetos abstratos, que ela denomina concepção *estrutural*, (e que em seu entendimento prevalece durante o período da matemática moderna), referem-se a apenas um aspecto possível para o tratamento das noções matemáticas. Uma noção, em seu entender, inclui também um aspecto que diz respeito a processos, algoritmos e ações, refletindo o que ela denomina concepção *operacional* de uma noção matemática. Sfard (1991) considera que esta última *é, para a maioria das pessoas, o primeiro passo na aquisição de uma noção matemática nova*.(SFARD, 1991, p.1).

Tais abordagens em Dubinsky (1988) e Sfard (1991), sem dúvida, convergem e estão sustentadas teoricamente em Piaget, que propõe e descreve o processo cognitivo denominado *abstração reflexiva*, retomado por Dubinsky e reinterpretado em um de seus aspectos como *reificação*, em Sfard (1991). No entanto, Piaget (por exemplo, 1977/2001) já distinguia entre duas formas de abstração: a abstração a partir da ação (abstração de ações) e abstração a partir de objetos (abstração de objetos).
Mais recentemente, Scheiner (2013), dentre outros pesquisadores, destaca o que consideram uma ênfase exagerada na "abstração de ações", por não representar nem explicar adequadamente os fenômenos envolvidos na construção de conceitos matemáticos (ver, por exemplo, PINTO, 1988; PINTO e TALL, 2002; SCHEINER e PINTO, 2014). De um modo geral, concepções operacionais, quero dizer, construídas a partir de ações, processos, algoritmos, têm sido propostas como a primeira abordagem teórica para a aprendizagem de conceitos, não só como foco de pesquisa, mas também na proposição de atividades e elaboração de outros materiais para serem utilizados na sala de aula de matemática. Desta forma, as possibilidades de construções a partir de objetos são negligenciadas.
Neste texto, discuto a noção de *abstração estrutural* como proposta em Scheiner (2013) e em Scheiner e Pinto (2014). Uma re-análise de um estudo de caso (PINTO, 1998; PINTO e TALL, 2002) tem como intenção refinar a noção e mostrar como ela pode ser utilizada para descrever a aprendizagem de conceitos matemáticos; em especial, o conceito formal de limite de sequencia de números reais. Discuto a exploração de (e com) objetos como estratégia de aprendizagem. Apresento a sugestão de como a noção de *abstração estrutural* pode influenciar a elaboração de materiais alternativos para as atividades em sala de aula (SCHEINER, 2013; SCHEINER e PINTO, 2014).
Na primeira seção retomo o programa de pesquisa de Dubinsky como um contraponto para entender melhor a apresentação e discussão da noção de *abstração estrutural*, que é apresentada logo em seguida.

2- A noção de abstração reflexiva e a abordagem operacional para entender proposições quantificadas, como proposta por Dubinsky

Em seu programa de pesquisa, Dubinsky estabelece a escolha de quadro teórico, referenciando-se em Piaget, declara o uso do entendimento dos próprios pesquisadores sobre matemática durante sua concepção e desenvolvimento, e a observação de estudantes envolvidos em atividades matemáticas propostas pelos pesquisadores. A questão de pesquisa se apresenta em termos de: como um tópico particular de matemática pode ser aprendido? (DUBINSKY, 1991, p.96) Em especial, o pesquisador conceitua abstração reflexiva; mostra como esta pode ser utilizada para descrever a epistemologia de vários conceitos matemáticos; indica explicações para dificuldades dos estudantes com diversos conceitos a partir desta noção de abstração; estabelece que o conceito de abstração reflexiva pode influenciar um design de ensino que resulta em melhor compreensão dos conceitos pelos estudantes.
Para descrever a epistemologia dos conceitos matemáticos, Dubinsky e seus colegas (DUBINSKY, 1986;. DUBINSKY et al, 1988; DUBINSKY, 1991) sugerem o que eles denominam por *decomposição genética* para definições que envolvem quantificadores.

Por exemplo, a definição de convergência de uma sequência (a_n) para um limite L pode ser apresentada como uma quantificação formal em três níveis, como

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \quad \forall n: \quad (n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \quad \forall n \geq N: \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

Dubinsky et al, (1988) sugerem que o aluno trabalha com tais proposições quantificadas construindo a quantificação interna com um único quantificador em primeiro lugar, para em seguida fazer atuar os sucessivos quantificadores externos, ou de nível superior. Em Pinto e Tall (2002) sugerimos que tal teoria parece estar relacionada com a estrutura interna da linguagem de programação ISETL[1], muito utilizada pelo pesquisador em suas atividades em sala de aula, e que oferece uma metáfora para podemos pensar em quantificadores. ISETL lida com conjuntos finitos, e assim pode testar proposições quantificadas considerando todos os elementos, um de cada vez. Exemplificamos com as proposições quantificadas envolvendo apenas um quantificador da forma:

$\forall x \in S : P(x)$ escrito em ISETL como "for all *x* in $S : P(x)$",

ou

$\exists x \in S : P(x)$ escrito em ISETL como "exists *x* in $S : P(x)$".

onde $P(x)$ é um predicado que é verdadeiro ou falso para cada *x* no conjunto finito *S*.
Em ISETL, a veracidade da proposição quantificada

for all *x* in $S : P(x)$

é determinada internamente executando sucessivamente os elementos x_1, ..., x_n de *S* e testando cada proposição $P(x_r)$. Se alguma das $P(x_r)$ for falsa, o valor "falso" é retornado, uma só vez. Por outro lado, se os testes são concluídos e cada $P(x_r)$ é verdadeira, o valor é retornado como "verdadeiro". De um modo semelhante,

exists *x* in $S : P(x)$

testa cada proposição $P(x_r)$, por sua vez retornando "verdadeiro" se for encontrado um valor em que a proposição é verdadeira e "falso" se todas são falsas.

[1] A linguagem ISETL é uma linguagem de computação algébrica. O software é livre.

Uma aplicação sucessiva do princípio descrito acima possibilitaria lidar com um predicado $P(x,y)$ em duas variáveis. A proposição

$$\forall x \in S \quad \forall y \in T : P(x,y)$$

pode ser manipulada em dois estágios: primeiro fixamos o *x* e consideramos a proposição interna

$$\forall y \in T : P(x,y)$$

Por iteração em todos os valores de *y*, a veracidade dessa afirmação poderia ser testada, resultando em uma proposição $Q(x)$ em uma única variável *x*:

$$Q(x) = \left[\forall y \in T : P(x,y)\right]$$

que é verdadeira ou falsa para cada valor de *x*.
Iterando em todos os valores de *x*, a veracidade da afirmação

$$\forall x \in S : Q(x)$$

pode ser testada, o que corresponderia a decidir sobre a veracidade de

$$\forall x \in S \quad \forall y \in T : P(x,y)$$

Este método pode se estender a proposições com vários quantificadores, trabalhando-se sucessivamente a partir da proposição quantificada interna para a externa. Dubinsky afirma que os alunos podem lidar com uma proposição com múltiplos quantificadores de modo semelhante: trabalhando as proposições a partir da proposição interna para a externa.
Em sua teorização, cada aplicação de um quantificador transforma um predicado $P(x)$ em uma proposição. Dubinsky refere-se a um predicado $P(x)$ como um *processo* (na variável *x*) e uma proposição quantificada tal como $\forall x : P(x)$ ou $\exists x : P(x)$ como um *objeto*. Isto relaciona o entendimento de uma quantificação de um predicado com sua noção cognitiva de *encapsular um processo como um objeto*, que ele considera como de fundamental importância para o desenvolvimento cognitivo:

a principal habilidade cognitiva (ou ato de inteligência) que sinto é necessário aqui é a capacidade de mover e para trás entre um processo interno e seu encapsulamento como um objeto. (DUBINSKY *et al.,* 1988, p.48)[2]

A aplicação sucessiva de quantificadores, do quantificador interno para o exterior, determinando a veracidade de cada declaração quantificada, oferece um método indutivo de redução gradativa da complexidade da proposição. No entanto, mesmo que a lógica seja evidente, a complexidade cognitiva deste processo de encapsulação para uma proposição multi-quantificada ainda é enorme. Além disto, o método de pesquisa descrito, declarando o uso do entendimento dos próprios pesquisadores sobre como os conceitos matemáticos são aprendidos e a elaboração de atividades a serem trabalhadas pelos

---

[2] Tradução minha de: *the major cognitive skill (or act of intelligence) that we feel is required here is the ability to move back and forth between an internal process and its encapsulation as an object.*

participantes das pesquisas, nos deixam em suspenso sobre até que ponto as dificuldades e sucessos dos alunos não estão condicionadas às mesmas.

3. A noção de abstração estrutural como alternativa para entender proposições quantificadas

A noção de *abstração estrutural* apresentada em Scheiner (2013), e retomada em Scheiner e Pinto (2014) resulta de (a) reconsiderar Davydov (1972/1990) e sua discussão sobre a ascensão do abstrato para o concreto de um ponto de vista dialético como expresso por Ilyenkov (1982), (b) levar em consideração as descobertas fundamentais na ciência cognitiva e em psicologia, (c) incorporar o quadro em bases filosóficas e realizar uma re-análise e apresentação dos dados obtidos em Pinto (1998).

A perspectiva adotada propõe que a noção de *abstração estrutural* tem uma natureza dual, a saber: (1) complementarizar os aspectos significativos e estrutura subjacente a objetos específicos que se enquadram no âmbito de um conceito matemático particular, e (2) promover a ampliação de estruturas de conhecimento coerentes e complexas, através de uma reestruturação e expansão de sistemas de conhecimento produzidos através do primeiro processo (SCHEINER, 2013; SCHEINER & PINTO, 2014). A proposta é a de que a *abstração estrutural* é incorporada em uma arquitetura cognitiva que tem lugar na estrutura dos objetos e na estrutura do conhecimento.

Do ponto de vista da *estrutura do objeto*, na proposta em Scheiner (2013), pressupõe-se que o "significado de um conceito" (FREGE, 1892) está quase sempre contido na unidade de diversos componentes significativas de uma variedade de objetos específicos que se enquadram em um conceito particular. Colocando o objeto (s) em diferentes contextos específicos, sua estrutura matemática é inserida ao olhar para o objeto em relação a si mesmo ou a outros objetos, que se incluem sob o conceito particular. *Abstração estrutural*, então, significa estruturar (mentalmente) tais aspectos subjacentes a objetos específicos. Dentro da visão empirista, a unidade conceitual baseia-se na identificação de similaridades entre elementos, enquanto é a inter-relação dos diversos elementos que cria unidade no âmbito da abordagem de abstração estrutural. Assim, o núcleo de *abstração estrutural* é *complementaridade* estrutural ao invés de *similaridades.*

Por meio da *abstração estrutural*, é produzido um *modelo*, que fornece uma estrutura teórica de um objeto em construção a partir dos seus componentes destacados como significativos. Tais modelos são, nesse sentido, intermediários no processo de abstração entre o "abstrato" e o "concreto", apoiando a *ascensão do abstrato para o concreto*, como descrito em Davydov (por exemplo, 1972/1990)[3]. Crucial nesta abordagem é a observação de Ilyenkov (1982) de que "o concreto é realizado pensando-o através do abstrato" (p. 37).

A característica fundamental na perspectiva da *abstração estrutural*, no entanto, está na ideia de que vários objetos específicos que se enquadram no âmbito de um conceito particular mutuamente se complementam (processo de

[3] A estratégia descrita por Davydov de ascender do abstrato para o concreto remete à transição do geral para o particular, no sentido de que os alunos inicialmente procuram o 'núcleo' primária e, progressivamente, deduzem múltiplas particularidades do objeto usando esse 'núcleo' como seu esteio.

complementarização); de modo que a abstração de cada um deles, considerados individualmente, é superada.
Em síntese, o processo de *abstração estrutural* representa um movimento no sentido da complementaridade dos diversos aspectos que criam uma unidade conceptual entre os objetos. Isto está de acordo com a perspectiva dialética descrito por Ilyenkov (1982) e difere das abordagens empiricistas, como descrita em Skemp (1986).
Do ponto de vista da *estrutura do conhecimento*, a *abstração estrutural* promove a reestruturação dos aspectos de conhecimento construídos por meio dos processos já descritos. A função cognitiva da *abstração estrutural* é a de promover ou produzir estruturas de conhecimento mais complexas. Neste processo, os *modelos de* objetos produzidos são utilizados como *modelos para* produzir novos conhecimentos.
A filosofia orientadora desta perspectiva pressupõe que os alunos adquirem conceitos matemáticos a partir de imagem conceitual relacionada já existente, integrando progressivamente imagens anteriores e/ou inserindo um novo discurso que reestrutura as imagens existentes. Esta perspectiva está em acordo com Pinto (1998)[4], que discute o caso de um grupo de alunos que constroem uma *representação de* um conceito (representações visuais, por exemplo) e, ao mesmo tempo, a utilizam como *representação para* produzir conhecimento - a recuperação verbal de uma definição formal, por exemplo.
Este grupos de alunos usa a definição formal de um conceito matemático como uma dentre outras representações relacionadas; sendo essas últimas construídas ou provenientes de experiências anteriores vividas na escola e/ou fora da escola - um sentido pleno para a proposta de considerarmos a definição do conceito incluída na célula da imagem de conceito. Dito de outro modo, a definição formal do conceito, para este grupo de alunos, não tem necessariamente primazia sobre as outras representações quando elaboram sua argumentação; mas pode ser, sim, primordial pelo um poder complementar para o quadro de representações do conceito, ampliando-o, transformando-o, reconstruindo-o.
Os estudantes que se limitaram a justapor fragmentos de conhecimento, por vezes conflituosos e sem buscar articulações, produziram uma estrutura subjacente às diferentes faces do conceito inconsistente, compartimentalizada, e o processo de abstração estrutural não se realizou por completo
Para discutir o uso de representações produzidas por processos descritos como *abstração estrutural*, reanaliso as entrevistas com um dos participantes da pesquisa, o aluno Chris.

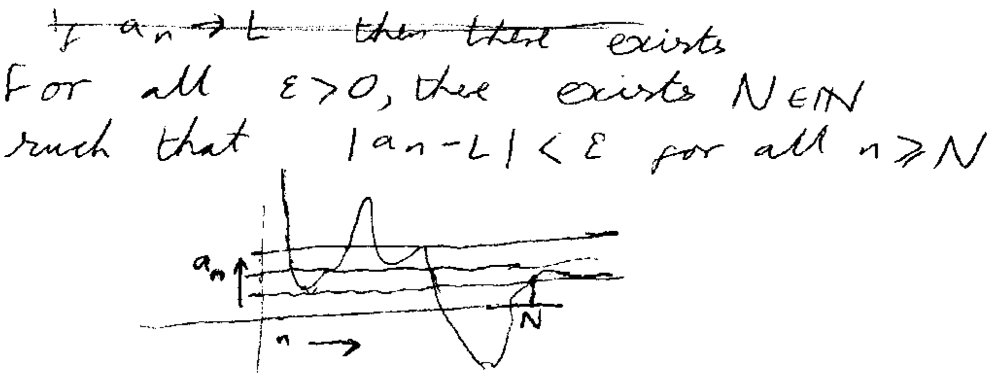
4. O uso de representações

Em sua primeira entrevista, Chris escreve a definição formal de limite de uma sequencia como a seguir.

---

[4] Pinto (1998) acompanha onze estudantes de matemática (bacharelado) durante vinte semanas do seu primeiro ano cursando análise real, observando a sala de aula. Entrevistas são realizadas em encontros individuais, em que os temas trabalhados em sala de aula na semana anterior eram discutidos, com questões preparadas ao longo do curso. Da análise indutiva do material produzido em entrevistas, uma estrutura emergiu, organizada em três eixos – definições, argumentos, imagem, permitindo caracterizar duas estratégias (atribuindo significado e extraindo significado) utilizadas pelos participantes para responder `a nova experiência.

Figura 1: Uma definição de limite de sequencia e uma representação do conceito de sequencia convergente



Fonte: Pinto (1998).

Ele afirma que não memorizou a definição, que procurou entendê-la consultando diversos livros, e que recupera seu enunciado e seu significado a partir de uma representação visual, que passa então a desenhar (Figura 1). Analisando a explicação de Chis enquanto ele desenhava, argumentamos que, antes de tudo, ele evoca uma *representação de* um objeto - uma sequencia convergente

Eu penso nela [a sequencia convergente?] graficamente ... eu penso nela como se você tivesse um gráfico ali, e eu penso que tem ... tem um limite lá ... então ...uma vez como aquele lá ... e você pode desenhar a partir daqui e então todos os ... pontos depois do N lá ... eles estão dentro destas fronteiras. ... ... se isto err quando eu pensei nisto [definição formal?], foi difícil de entender, então eu pensei nisso como nesta figura ... tipo aquele é o n indo além e aquele é o a n ...

(Chris, primeira entrevista).

Vale observar que Chris constrói em sua figura uma representação do conceito de sequencia convergente e, ao mesmo tempo, faz uso desta representação construir um novo conhecimento – a enunciação da definição formal do conceito de limite. No caso dos estudantes que 'atribuem significado', as *representações de* objetos são constantemente utilizadas de modo semelhante, para construir novos conhecimentos. Em outras palavras, *representações de* são constantemente utilizadas como *representações para* construir e dar sentido à experiência matemática.

Esta alternância entre produzir uma representação do conceito e usá-la como uma representação genérica para organizar e reorganizar novos contextos pode ser descrita em termos de mudanças entre um *modelo de* a um *modelo para* (ou, na linguagem que estou utilizando, entre *representação de* a uma *representação para*)

Esta distinção remete ao trabalho de Freudenthal na década de 70 que propõe:

<u>Modelos de</u> algo são pós-imagens de um pedaço de uma realidade dada; <u>modelos para algo</u> são pré-imagens para um pedaço de realidade a ser criada .

(FREUDENTHAL, 1975, p. 6, grifo do autor)

O movimento de transformação de uma *pós-imagem* em uma *pré-imagem* indica um grau de consciência sobre os componentes significativos na primeira e sobre a complexidade das estruturas de conhecimento que permite a transição de “uma" representação para "várias” representações que expressam objetos específicos colocados em diferentes contextos, para uma *representação para* construir e reconstruir o conceito, no argumentação matemática formal.
No entanto, o uso de uma *representação para* não significa consistência a priori de uma imagem do conceito nem uma coerência da representação, em si.
No caso de Chris, por exemplo, embora bastante genérica, a sua representação de sequência convergente ainda reflete interpretações comuns, tais como a de que o limite está inacessível; sugerindo que a estrutura do conceito ainda não está completa, neste momento.
Durante a primeira entrevista, a co-existência de visualizações dinâmicas do conceito de limite em sua imagem do conceito é confirmada quando ele expressa suas dúvidas ao responder se a sequência 1, 1, 1, ... tem um limite:

Na verdade eu não sei. Ela definitivamente vai ... vai ser sempre um ... por isso não estou realmente certo ... umm ... é estranho, porque quando alguma coisa tende a um limite, você pensa nela como nunca chegando lá ... por isso, se é ... 1 ... então, pela definição, [ela] tem um limite, mas ... a gente realmente não pensa nele [1] como um limite, mas apenas como um valor constante.... eu realmente não sei.

(Chris, primeira entrevista)

Neste excerto, Chris evoca uma visão dinâmica do conceito de limite e uma compreensão inconsistente (limite como inacessível) coexistindo com a definição formal que ele já consegue enunciar com significado. Sua seriedade ao expressar suas dúvidas sugerem que, mesmo imerso na cultura de sala de aula na universidade, ele não vai eliminar suas imagens anteriores quando confrontado com a definição formal. Por outro lado, ele reconhece que o sentido do conceito não está completo em sua estrutura global e que no momento é constituído por aspectos conflitantes de conhecimento. Em certo sentido, para Chris, não há *primazia* da definição formal em relação a outras representações, no sentido de exclusão de imagens anteriores ao tomar conhecimento da definição formal. Por outro lado, há o *poder complementar* da nova representação (formal) sendo integrada progressivamente com um *novo discurso* (formal), resolvendo os conflitos entre esta e as imagens anteriores. Uma representação da estrutura do conceito reconstruído é apresentado na última entrevista, quando ele expressa espontaneamente sua definição do conceito, sem formalizá-la:

A sequence has a limit if and only if as the sequence progresses, eventually, all values of the sequence gather around a certain value.

(Chris, sétima entrevista)

Scheiner e Pinto (2014) interpretam os modos acima de reconstruir visualizações dinâmicas de limite em versões (aparentemente) estruturais, complementarizando e unificando as diversas representações, incluindo a definição formal, como *movimentos em diferentes níveis de complexidade* que só são recuperados ao examinar as descrições de Chris sobre suas tentativas de entender a definição formal. Por exemplo, durante sua segunda entrevista, Chris comenta:

Eu não percebi que você tinha que ... apenas encontrar um N ... tipo tal que ... módulo de a n é menor que epsilon. Não entendi ... não peguei essa última parte. ... ... O fato de que, na verdade, você consegue um. (Risos) Eu não entendi muito bem isso. ... ... Eu olhei de novo e, então, uma vez que eu percebi ... que ... você tem que apenas encontrar ... um valor que deve depender de epsilon ... então ... [eu pude] ver o que a definição quis dizer.

(Chris, segundo entrevista)

Chris parece estar se referindo à exploração da parte interna da declaração quantificada para entendê-la primeiro, como sugerido em Dubinsky et al. (1988):

apenas encontrar um N ... tipo tal que ... módulo de a n é menor que epsilon. Não entendi ... não peguei essa última parte. ...

No entanto, o entendimento não nos parece resultar de uma sequência de ações sobre processos encapsulados como objetos – os predicados e proposições quantificadas, dos quantificadores internos aos exteriores. Chris explora a declaração interna para verificar uma propriedade satisfeita por um objeto - uma sequência convergente, da qual ele já tem uma *representação*. Suas dúvidas sobre o *fato de que você realmente encontra um* valor de N, parecem estar relacionadas ao refinamento de sua representação de convergência. Enquanto ele examina *o que é permitido acontecer*, buscando complementaridade, permite sequências crescentes, decrescentes, em movimentos diversos, para cima e para baixo.
Em sua última entrevista, Chris traz uma reflexão sobre suas tentativas de entender a definição como a seguir:

Umm ... a coisa é ... quando você pensa sobre por que ... por que você está realmente fazendo isso ... então ... é quando tudo se torna claro. Você descobre por que você está escolhendo o N de modo que ficam todos lá dentro, então ... ela [a sequencia] tende gradualmente para esse limite. ... Mas ... é ... quando você está escolhendo um valor de N ... tal que todos os pontos depois [do valor de N] podem fazer o que quiserem lá dentro, é que você realmente ... acha que você pode, .. fazer epsilon pequeno .

(Chris, sétima entrevista)

A reflexão acima sugere que Chris concluiu que *todos os pontos depois [do valor de N] podem fazer o que quiserem lá dentro* da região no plano limitado por duas retas que representam $y = L + \varepsilon$ e $Y = L - \varepsilon$. Esta é uma propriedade que ele passa a atribuir a sequencias convergentes.
Entendemos que Chris conclui após utilizar e/ou reconstruir sua representação. Na verdade, ele a utilizou em experimentos, estipulando um valor ou posição N e encontrando um ε relacionado, em uma inversão de lógica do que é declarado na definição formal:

.. Você decide quão longe ... e você pode trabalhar um epsilon a partir disto ... ou se você escolher um epsilon você pode trabalhar o quão longe.

(Chris, primeira entrevista)

O fato é que deslocar (como um experimento mental) o *N* para a direita e determinar ε, em sua representação visual, provoca uma sensação dinâmica que é a da sequência tendendo a um limite. Bem como a percepção da simultânea genericidade e universalidade de ε . Como Chris comenta na última entrevista:

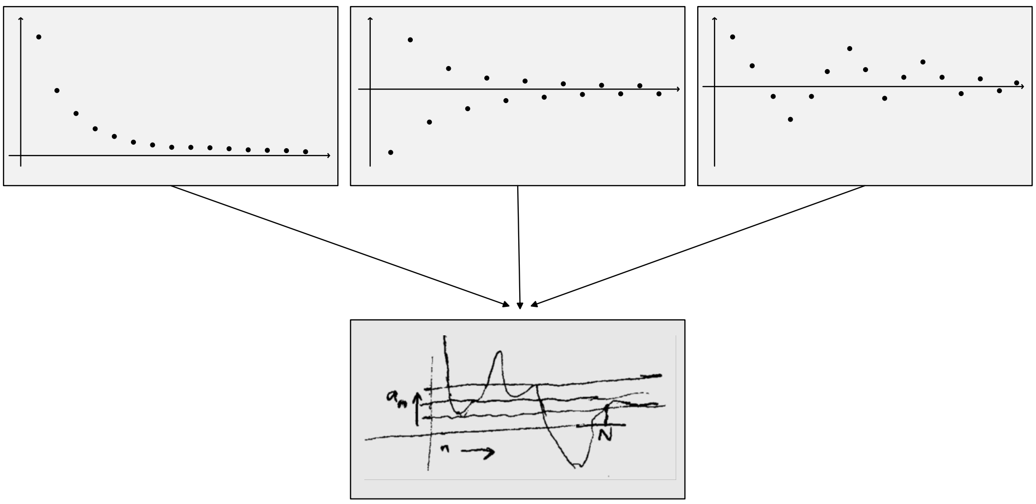
Eu acho que foi isso ... Eu não estava pensando ... em geral sobre isso ... Eu não estava pensando que, geralmente, ele funciona para qualquer epsilon ... Eu só estava pensando ... de um caso.
[Sim, não basta fixar um.]
Sim.

Durante a sua exploração, ele percebe a ação do quantificador externo, ou seja, seu significado foi construído em contexto, usando a *representação de* sequencia convergente como *representação para* construção de novo conhecimento – a definição formal de limite de sequencia.

5. Desdobramentos: visualização e ensino da matemática

Em seu contato com o conceito formal de limite de sequencia, Chris constitui uma *representação de* uma sequência que depois é usada como *representação para* entender a definição formal; ou em outras palavras, como uma representação genérica para organizar novas situações e contextos, e para argumentar matematicamente. Scheiner e Pinto (em preparação) sugerem na figura a seguir algumas fontes potenciais que Chris pode ter utilizado para estruturar a sua representação genérica; cada uma indicando componentes significativas específicas do conceito de limite, como no processo descrito como *complementarização*.

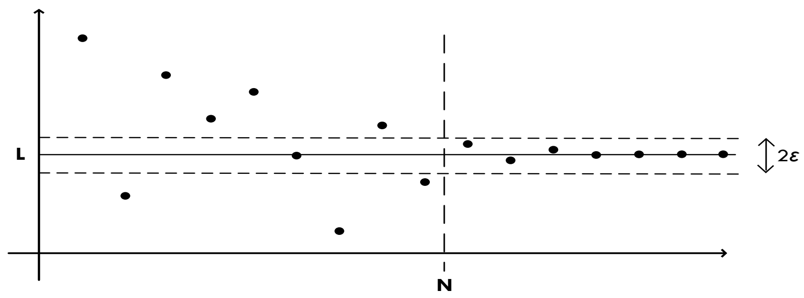
Figura 2: Fontes potenciais para a representacão de sequencia convergente



Fonte: Scheiner & Pinto (em preparação)

Ao invés de similaridades, o núcleo da complementarização são as inter-relações entre objetos aparentemente distintos. Em seu último estágio, a representação não estaria mais relacionada a um contexto ou situação específica, mas refletiria um ponto de vista mais geral. A representação tornar-se uma entidade com um estatuto próprio e pode ser utilizada como instrumento para estruturação do conhecimento.
A noção de abstração estrutural, em sua dupla natureza - complementarizar e usar os modelos idealizados para promover o crescimento das estruturas do conhecimento coerentes e complexas, fornece uma ferramenta promissora para descrever a arquitetura cognitiva envolvida na aprendizagem do conhecimento conceitual. Além disto, Scheiner e Pinto (em preparação) sugeridos pela representação construída pelo aluno Chris, propõem a representação na figura como um recurso alternativo a ser experimentado na formalização do conceito de sequencias como apoio para o estudo de definições, resolução de problemas, construção de argumentos a serem formalizados.

Figura 3: Uma representação para a aprendizagem do conceito de limite de sequencia



Fonte: Scheiner &Pinto (em preparação)

Do nosso ponto de vista, a *abstração estrutural* é entendida como um movimento *do particular para uma totalidade,* em termos de *complementarização* de componentes e estrutura particulares em um todo significativo. Por outro lado, refere-se a um movimento de reestruturação de 'pedaços de conhecimento' em estruturas de conhecimento coerentes e mais complexas. Em síntese, a *abstração estrutural* busca explicar os processos envolvidos como um movimento entre diferentes níveis de complexidade ao invés de níveis de generalidade. Com esta abordagem, acreditamos livrar o termo abstração de conotações que lhe têm sido associados em muitas obras, nas últimas décadas.

6. Referências

DAVYDOV, V. V. *Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula* (Soviet studies in mathematics education, Vol. 2) Reston, VA: NCTM. 1972/1990.

DUBINSKY, E. A theoretical perspective for research in learning mathematics concepts: genetic decomposition and groups. (Informal Summary of Presentation). 1986.

DUBINSKY, E. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking,* Kluwer: Dordrecht, 95–123. 1991.

DUBINSKY, ELTERMAN & GONG. The Student's Construction of Quantification. *For the Learning of Mathematics* **8,** 2. 44–51. FLM Publishing Association, Montreal, Quebec, Canada. 1988.

FREGE, G. Über Begriff und Gegenstand (On concept and object). *Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie*, *16*, 192-205. 1982.

FREUDENTHAL, H. Voorwoord. In R. de Jong, A. Treffers, & E. Wijdeveld (Eds.), *Overzicht van Wiskundeonderwijs op de Basisschool, Leerplanpublikatie 2*. Utrecht, The Netherlands: IOWO. 1975.

ILYENKOV, E. V. *The dialectics of the abstract and the concrete in Marx's Capital*. Moscow: Progress. 1982.

PIAGET, J. *The Principles of Genetic Epistemology,* (W. Mays trans.), London, Routledge & Kegan Paul. 1972.

PINTO, M. M. F. *Students' Understanding of Real Analysis.* PhD Thesis, Warwick University. Ann Arbor, Michigan: ProQuest-CSA, LLC. 1998/2011.

PINTO, M., M. F. & TALL, D. O., (2002). Building formal mathematics on visual imagery: a case study and a theory. For the Learning of Mathematics. 2002.

SCHEINER, T. Mathematical Concept Acquisition: Reflective, Structural, and Reflectural Learners. *Paper presented at the Working Group 'Factors that Foster or Hinder Mathematical Thinking' of the 37th Conference of the IGPME*. Kiel, Germany: PME. 2013.

SCHEINER, T., & PINTO, M. M. F. Cognitive processes underlying mathematical concept construction: The missing process of structural abstraction. In C. Nicol, S. Oesterle, P. Liljedahl, & D. Allan (Eds.). *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 105-112). Vancouver, Canada: PME. 2014.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 1-36. 1991.

SKEMP, R. R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics,* (2nd edition, 1986). London: Penguin Books Ltd. 1971.

TALL, D. O. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking,* Kluwer: Dordrecht. 1991.