

## Algumas questões sobre Pesquisa em Educação Algébrica

José Luiz Magalhães de Freitas – INMA – UFMS  
Email: joseluizufms2@gmail.com

### Introdução

Neste estudo analisamos alguns aspectos sobre a pesquisa em Educação Algébrica, dentre eles a problemática do ensino e da aprendizagem da álgebra e pensamento algébrico na educação básica. Assim, apresentamos uma discussão sobre a abordagem introdutória da álgebra, por exemplo, por meio do trabalho com equações e expressões ou propriedades envolvendo símbolos e cálculo literal; ou por modelagens e problemas; ou ainda pelo estudo de generalização de padrões. Finalizamos com reflexões sobre resultados de pesquisas e questionamentos sobre desafios em Educação Algébrica.

Sabemos que há diferentes concepções sobre educação algébrica, bem como sobre pensamento algébrico e perspectivas de ensino e aprendizagem da álgebra. Também são muitas as questões envolvendo o tema e, para iniciar nossas reflexões, vamos apresentar algumas que avaliamos como importantes.

### Álgebra, educação algébrica e pensamento algébrico

Optamos por iniciar retomando algumas ideias e questionamentos sobre álgebra, educação algébrica e pensamento algébrico propostos por Ponte et al (2009), pela apresentação clara, objetiva e concisa feita pelos autores. Vamos iniciar pela importante questão: ***quais são os objetos fundamentais da Álgebra?***

Embora não seja tarefa fácil encontrar uma resposta satisfatória para ela, um caminho para descobrir elementos de resposta é considerar aspectos históricos e epistemológicos do desenvolvimento da Álgebra. Assim, observa-se que durante muitos séculos a humanidade buscou meios de resolver equações e

até o final do século XVIII a Álgebra consistia em *equações e expressões* e, a partir daí, sobretudo dos trabalhos de Galois, ocorre uma ampliação, incorporando objetos abstratos como as *estruturas algébricas*. Nos dias de hoje, concordando com Ponte et al (2009, p.7), “... no centro da Álgebra estão relações matemáticas abstratas, que tanto podem ser expressas por equações, inequações ou funções, como podem ser representadas por outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos.”

Outra questão que surge é a seguinte: ***quais são as principais “visões ou concepções”, de Álgebra e de Educação Algébrica, que permeiam as pesquisas e práticas pedagógicas na Educação Básica?***

A concepção de que a Álgebra se limita às *equações e expressões*, e que seu estudo consiste, essencialmente, em realizar transformismos algébricos, muitas vezes limitados ao cálculo algébrico, equações do 1º e 2º graus e sistemas de equações, ainda parece bastante presente na Educação Básica. Segundo Ponte et al (2009):

Trata-se de uma visão redutora da Álgebra, que desvaloriza muitos aspectos importantes desta área da Matemática, quer relativos à Antiguidade (resolução de problemas), quer actuais (relações, estruturas algébricas), quer mesmo do período “clássico” da Álgebra (estudo de funções). (PONTE et al, 2009, p.7 e 8)

Ainda sobre essa primeira perspectiva de abordagem da Álgebra, Ponte et al (2009), observam que:

A primeira corrente corresponde à *visão letrista*, na expressão de Rómulo Lins e Joaquin Giménez, que reduz a Álgebra exclusivamente à sua vertente simbólica. Esta visão tem uma versão “pobre”, em que o objectivo é aprender a manipular os símbolos apenas por treino e prática, e tem uma versão “melhorada” segundo a qual o objectivo é aprender a manipular correctamente os símbolos, recorrendo a apoios intuitivos como modelos analógicos, de carácter geométrico (como figuras, objectos) ou físico (como a balança). Com estes apoios intuitivos procura dar-se significado às manipulações, o que raramente se consegue, dada a preocupação central com os aspectos sintácticos. Esta perspectiva assume que a Álgebra constitui um instrumento técnico para a resolução de problemas mais poderoso que a Aritmética e coloca a ênfase no domínio das respectivas regras sintácticas para a transformação de expressões – actividade que Dario Fiorentini, Ângela Miorim e António Miguel designam de *transformismo algébrico*. O pressuposto é que se o aluno dominar essas regras, posteriormente é capaz de as aplicar a situações concretas. (PONTE et al, 2009, p.13 e 14)

Uma outra perspectiva, bem próxima desta é a de que a Álgebra é constituída de um conjunto de *símbolos* e faz uso de uma linguagem algébrica, com uma sintaxe própria. Segundo Ponte et al (2009):

Esta perspectiva não anda longe da concepção formalista da Matemática – bem popular no início do século XX, com o logicismo de Gottlob Frege e Bertrand Russell e o formalismo de David Hilbert – segundo a qual a Matemática é essencialmente um jogo de símbolos sem significado. (PONTE et al, 2009, p.8)

A independência e coerência das formas de relacionar seus objetos tornam a Álgebra potente, mas também pode contribuir para o seu isolamento. Assim, ao distanciar-se dos elementos concretos, ela pode ser vista como jogo de símbolos de difícil compreensão e com pouco significado e para os alunos. O jogo de símbolos, envolvendo propriedades algébricas e distante dos problemas reais, foram os principais fatores que provocaram o fracasso do Movimento da Matemática Moderna.

Para muitas pessoas, esse tipo de entrada na álgebra significa o momento de ruptura com a matemática, pois deixa de ter significado para elas. A letra pode ter vários níveis de generalidade na álgebra elementar. Várias classificações já foram feitas, dentre elas a de Kuchemann (1978), onde ele identifica seis estatutos de uso de letras em álgebra: avaliada, objeto (etiqueta), incógnita, número generalizado (indeterminado) e variável. No que concerne às possibilidade de uso de letras em álgebra, há quatro estatutos que são mais frequentes: rótulo (etiqueta), incógnita, número indeterminado e variável. Dificuldades encontradas no aprendizado do cálculo literal e dos diferentes estatutos da letra têm sido objeto de várias pesquisas em Educação Matemática.

Nas últimas décadas vem sendo realizados muitos estudos e pesquisas com o objetivo de delimitar o que poderia integrar os programação das escolas da Educação Básica, no que concerne à Álgebra. Segundo Ponte et al (2009), esses estudos fizeram emergir o interesse pela caracterização do **pensamento algébrico**, dando origem a uma terceira corrente que:

... procura ultrapassar as limitações das duas anteriores, preservando, no entanto, os respectivos contributos. Assim, procura recuperar-se o valor instrumental da Álgebra, mas sem a reduzir à resolução de problemas susceptíveis de serem resolvidos através de uma equação ou um sistema de

equações. Procura dar-se ênfase aos significados que podem ser representados por símbolos levando os alunos a “pensar genericamente”, percebendo regularidades e explicitando essas regularidades através de estruturas ou expressões matemáticas e a “pensar funcionalmente”, estabelecendo relações entre variáveis. Procura agora valorizar-se a linguagem algébrica como meio de representar ideias e não apenas como um conjunto de regras de transformação de expressões simbólicas. Trata-se, no fundo, de promover o *desenvolvimento do pensamento algébrico*, tal como referimos no capítulo anterior. (PONTE et al 2009, p.14)

Segundo esses autores:

Um dos autores que escreveu sobre esta ideia foi o americano James Kaput, para quem o pensamento algébrico é algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático leccionado desde os primeiros anos de escolaridade. Kaput identifica, em 1999, cinco facetas do pensamento algébrico, estreitamente relacionadas entre si: (i) a generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) a manipulação de formalismos guiada sintacticamente; (iii) o estudo de estruturas abstractas; (iv) o estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis; e (v) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos. Num texto mais recente, de 2008, Kaput refere de novo estes cinco aspectos, integrando os dois primeiros (simbolismo e generalização), que designa como “aspectos nucleares” (*core aspects*) da Álgebra, e considerando os três últimos como “ramos” (*strands*) deste domínio com expressão na Matemática escolar. (PONTE et al, 2009, p.9)

Borrvalho e Barbosa (s/d), apresentam outros elementos para a caracterização do conceito de pensamento algébrico:

O *pensamento algébrico* diz respeito à simbolização (representar e analisar situações matemáticas, usando símbolos algébricos), ao estudo de estruturas (compreender relações e funções) e à modelação. Implica conhecer, compreender e usar os instrumentos simbólicos para representar o problema matematicamente, aplicar procedimentos formais para obter um resultado e poder interpretar e avaliar esse resultado. (BORRALHO e BARBOSA, s/d, p.1)

Agora nos perguntamos: ***como vem ocorrendo a introdução da Álgebra para alunos da Educação Básica?***

Buscando resposta para essa questão, Artigue (2003) realizou um estudo mostrando que, apesar da álgebra estar presente nos programas do ensino fundamental de todo o mundo, sua introdução não ocorre da mesma maneira nos diferentes países. Ela mostrou que na França, bem como Brasil, Itália e Israel a entrada usual era pelas equações, acompanhada de cálculos com

expressões algébricas, enquanto que outros países, em particular os anglo-saxônicos, davam prioridade à expressão de regularidades (padrões) e à generalização. Em seus estudos ela identificou ainda uma terceira via, caso dos países baixos, em a ênfase era para a modelagem de situações, privilegiando variáveis, funções e diferentes tipos de representações.

## **Pesquisas em Educação Algébrica**

Após essa breve incursão sobre ideias e concepções de álgebra e pensamento algébrico, surge a questão: ***quais pesquisas em Educação Algébrica vêm sendo desenvolvidas e quais os principais desafios que ainda precisam ser enfrentados?***

Assim, inicialmente faremos uma exposição teórica geral, na qual buscaremos analisar alguns resultados de pesquisa. Nosso objetivo não é fazer uma abordagem exaustiva do assunto, apenas como tentativa de nos situarmos.

Assim, retomamos alguns trabalhos que consideramos importantes, dentre eles os de Chevallard (1985, 1989 e 1990), sobre a *passagem da aritmética para a álgebra*. Sobre esse tema Chevallard publicou três artigos sobre a transposição didática e modelagem algébrica, publicados na revista *Petit x*, sob o título "Passagem da aritmética para a algébrica no ensino de matemática no colégio".

No primeiro artigo Chevallard (1985) estudou a evolução da transposição didática, analisando o currículo e livros didáticos desde o início do século até a reforma da matemática moderna na década de 1970. Nesta abordagem histórica ele mostra a oposição secular entre os campos da aritmética e o algébrico.

No segundo artigo Chevallard (1989) estudou o conceito de modelagem numa perspectiva curricular. Segundo ele, a reforma da implementação da educação básica na França, nos anos 1985, foi marcada pelo triunfo empirista, que, em nível do colégio (correspondente aos anos finais do Ensino Fundamental), se traduz em "um vigoroso impulso do numérico; pela dispersão e o esvaziamento

da aprendizagem de ferramentas algébricas, por insistência ingênua sobre o concreto, ... ». Por outro lado, para o referido autor, "o controle formal do cálculo funcional" deve ser o primeiro objetivo do ensino de álgebra do colégio. Este domínio é expresso por uma aptidão para modelagem; tanto extramatemática quanto intramatemática. Segundo ele o ensino de álgebra no colégio deve, por um lado, assegurar uma habilidade formal de cálculo algébrico e por outro, o domínio de uma dialética entre o numérico e o algébrico, o tratamento formal e o uso do cálculo algébrico.

Finalmente, na terceira parte, Chevallard (1990) apresenta algumas pistas para o ensino de álgebra que combinam a modelagem e estudos de 'sistemas'. Ele observa, por exemplo, que se os números naturais se revelam inadequados como ferramenta de estudo, como objeto de estudo, eles fornecem um privilegiado, mas hoje negligenciado. "O estudo dos números naturais, portanto, aparece como um campo matemático aberto para o trabalho com o cálculo algébrico." Seu programa de investigação envolve a retomada de tais domínios como de emprego potencial.

De fato, o sistema de números inteiros como objeto de estudo, oferece muitos fenômenos que podem ser modelados algebricamente e permite explorar conceitos da teoria dos números, como mostram as pesquisas de Freitas, Lima e Silva (2011), que exploram o conjunto dos inteiros como campo experimental para introdução da álgebra na Educação Básica.

Um outro bloco de pesquisas se interessam pelas ***pseudo continuidades entre a aritmética e a álgebra***, dentre as quais apresentamos a seguir, de forma breve, algumas delas.

Há um outro bloco de pesquisas, campo da álgebra elementar que se interessam pelas pseudo continuidades entre a aritmética e a álgebra, investigando dificuldades dos alunos relacionadas com a transição da aritmética para a álgebra, tais como (Vergnaud et al, 1987), (Kieran et al, 1991) entre outros, sem a intenção de apresentar uma lista exaustiva.

Segundo Vergnaud et al. (1987), a álgebra apresenta para os alunos uma dupla ruptura epistemológica, por um lado por causa da introdução de um *desvio formal*, por outro devido à introdução de novos objetos matemáticos.

Neste desvio o aluno deve manipular expressões formais que não dependem do "significado", pois se trata de um tipo de tratamento muito diferente daquele da aritmética. Essa ruptura provoca o fracasso de um grande número de alunos, aqueles que permanecem ligados às práticas de resolução aritmética. Vergnaud se questiona sobre a maneira "de considerar um determinado ensino de álgebra ou de pré-álgebra, em toda a escolaridade, incluindo a escola primária, para permitir que os alunos a abordem com um pouco mais de chance de sucesso essa ruptura epistemológica". Ele propõe alguns exemplos de problemas para alunos dos anos finais do ensino fundamental e observa as reações dos iniciantes fracos, em indicar várias direções de pesquisa que podem ser tomadas com relação à introdução da álgebra. Ele observa que os alunos "iniciantes fracos em álgebra" têm dificuldades para produzir soluções de tipo algébrico.

Vergnaud et al (1987) ou Kieran et al (1991) realizaram pesquisas onde mostram que o significado do sinal de igual pode ser "de efetivação de operações ou 'anúncio de um resultado'. Assim, para esses alunos o sinal de 'igual' não é simétrico, nem transitivo.

Para a maioria dos alunos, no início do ensino secundário, o sinal de igualdade mantém o sentido do anúncio de um resultado de um cálculo aritmético. Por exemplo, a solução para um problema com duas operações:  $23 + 31 = 54$  e  $54 - 14 = 40$  é muitas vezes escrito em uma única linha:  $23 + 31 = 54 - 14 = 40$ . (VERGNAUD et al. 1987, p. 260).

"O sinal de igual é lido como 'dá' é um sinal direcional da esquerda para a direita." Kieran et al. (1991).

Há outros autores que identificaram outras dificuldades dos alunos envolvendo o sinal de igual e também com cálculos algébricos, estatuto das letras, tratamentos e conversões de representações, entre outros, sobre as quais não nos detivemos, pois aqui o objetivo era apenas pontuar.

### **Considerações finais**

Gostaria de finalizar com algumas reflexões sobre a questão: ***Quais as principais perspectivas para a pesquisa e o ensino de álgebra na educação básica?***

Bednarz, Kieran e Lee (1996) buscam encontrar respostas encontrar respostas para essa questão por meio da edição do livro *APPROACHES TO ALGEBRA: perspectives for research and teaching*. Assim, logo no capítulo 1 do livro elas identificam e abordam cinco perspectivas para introdução e desenvolvimento da álgebra: 1) Histórica; 2) Generalização; 3) Resolução de Problemas; 4) Modelagem e 5) Funcional.

Elas concordam que a introdução na álgebra escolar pode ocorrer seguindo diferentes direções e fazem uma pergunta um tanto embaraçosa: ***o que nós sabemos sobre cada uma dessas abordagens, suas contribuições, bem como dificuldades que cada uma delas provoca em parte dos alunos?***

Permeando todos os capítulos desse livro encontram-se temas, problemas e abordagens variadas e interessantes. No último capítulo, há um balanço de progressos identificados na abordagem da álgebra, mas também de desafios a serem ainda enfrentados. Dentre eles destacamos alguns para finalizar nossos questionamentos e reflexões sobre o tema.

Assim, nesse último capítulo são retomados aspectos da álgebra na história; caracterização do que é álgebra; interlúdio (valorização das razões para estudar álgebra); as quatro abordagens: Generalização, Funções, Resolução de problemas e modelagem; grandes ideias e finaliza com a apresentação de quatro questões. Embora algumas delas já haviam apresentadas, encontrar respostas satisfatórias a elas continua sendo um desafio, tanto para professores de matemática quanto para pesquisadores da área de Educação Matemática.

As quatro questões propostas pelos autores são as seguintes:

1. ***Quais são as características essenciais do pensamento algébrico?***
2. ***O que pode ser construído no aprendizado de álgebra?***
3. ***Quais são os obstáculos encontrados na aprendizagem de álgebra?***
4. ***Como podemos escolher uma abordagem para levar à "Iniciação em Álgebra"?***



## Referências

- ARTIGUE, Michèle. *Enseigner les mathématiques aujourd'hui. Pourquoi? Pour qui? Comment?* Paris: Bulletin de l'APMEP, n. 449, pp. 742-756, 2003.
- BEDNARZ, Nadine, KIERAN, Carolyn and LEE, Lesley (org). *APPROACHES TO ALGEBRA: Perspectives for Research and Teaching*. Kluwer Academic Publishers Group. Netherlands, 1996.
- BOOTH, Lesley. Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire, *Petit x*, n. 5, pp. 5–17, 1985.
- BORRALHO, António e BARBOSA, Elsa. *Pensamento Algébrico e exploração de Padrões*. Publicação da Associação de Professores de Matemática de Portugal, disponível em [http://www.apm.pt/files/\\_Cd\\_Borralho\\_Barbosa\\_4a5752d698ac2.pdf](http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf). Acesso em 12/04/2015.
- CHEVALLARD, Yves. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. (1<sup>ère</sup> partie): l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, Grenoble, n. 5, pp. 51-94, Ed. IREM de Grenoble, 1985.
- CHEVALLARD, Yves. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège (2<sup>e</sup> partie), *Petit x*, Grenoble, n. 19, pp. 43-72, Ed. IREM de Grenoble, 1989.
- CHEVALLARD, Yves. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège (3<sup>e</sup> partie). *Petit x*, n. 23, pp. 5-38, Ed. IREM de Grenoble, 1990.
- FIORENTINI, Dario, MIORIM, Maria Ângela, & MIGUEL, Antônio. Contribuição para um repensar... A educação algébrica elementar. *Pro-Posições*, 4(1), pp. 78-91, 1993.
- FREITAS, José Luiz Magalhães de. *L'activité de validation lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre: une étude des types de preuves produits par des élèves de collège et lycée*. Thèse. Montpellier: Université Montpellier II, 1993.
- FREITAS, José Luiz Magalhães de, LIMA, Anete Valéria Masson Coimbra de, e SILVA, Maysa Ferreira da. O conjunto dos números inteiros como campo experimental para introdução da álgebra na Educação Básica. *Educação Matemática em Revista*, publicação da SBEM, v. 33, p. 4-12, 2011.
- KAPUT, J. J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge, 2008.

KIERAN, Caroline. Cognitive processus involved in learning school algebra, Learning algebra. *In Mathematics and cognition*, J. Kilpatrick (ed.), Cambridge University press, 1991.

KUCHEMANN, D., Children's understanding of numerical variables, *Mathematics in school*, 7(4), 23-26, 1978.

LINS, Rômulo Campos e GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. São Paulo: Papirus, 1997.

PONTE, João Pedro da, BRANCO, Neusa & MATOS, Ana. *Álgebra no Ensino Básico*. Publicação do Ministério da Educação de Portugal. Disponível em [http://pt.slideshare.net/con\\_seguir/algebra-10386934](http://pt.slideshare.net/con_seguir/algebra-10386934). Acesso em 12/04/2015.

VERGNAUD, Gérard, CORTES A., FAVRE, e ARTIGUE, P., Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques, in *Actes du colloque de Sèvres: Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, p. 259 – 288, Editions la Pensée Sauvage, 1987.