

O GeoGebra no estudo das Transformações Ortogonais

Tânia M. M. de Carvalho
Deborah A. S. Reis

FACIP/UFU

16 de Novembro de 2011

O aluno ingressante em cursos superiores da área de exatas, traz consigo uma enorme deficiência em Geometria Plana e esta deficiência se reflete na Geometria Espacial e Analítica e, conseqüentemente, no Cálculo.

As dificuldades do aluno verificam-se principalmente nas:

- limitações relativas à visualização espacial de um objeto;
- determinação das propriedades geométricas deste objeto;
- estruturação matemática das propriedades do objeto.

O aluno ingressante em cursos superiores da área de exatas, traz consigo uma enorme deficiência em Geometria Plana e esta deficiência se reflete na Geometria Espacial e Analítica e, conseqüentemente, no Cálculo.

As dificuldades do aluno verificam-se principalmente nas:

- limitações relativas à visualização espacial de um objeto;
- determinação das propriedades geométricas deste objeto;
- estruturação matemática das propriedades do objeto.

O aluno ingressante em cursos superiores da área de exatas, traz consigo uma enorme deficiência em Geometria Plana e esta deficiência se reflete na Geometria Espacial e Analítica e, conseqüentemente, no Cálculo.

As dificuldades do aluno verificam-se principalmente nas:

- limitações relativas à visualização espacial de um objeto;
- determinação das propriedades geométricas deste objeto;
- estruturação matemática das propriedades do objeto.

O aluno ingressante em cursos superiores da área de exatas, traz consigo uma enorme deficiência em Geometria Plana e esta deficiência se reflete na Geometria Espacial e Analítica e, conseqüentemente, no Cálculo.

As dificuldades do aluno verificam-se principalmente nas:

- limitações relativas à visualização espacial de um objeto;
- determinação das propriedades geométricas deste objeto;
- estruturação matemática das propriedades do objeto.

O aluno ingressante em cursos superiores da área de exatas, traz consigo uma enorme deficiência em Geometria Plana e esta deficiência se reflete na Geometria Espacial e Analítica e, conseqüentemente, no Cálculo.

As dificuldades do aluno verificam-se principalmente nas:

- limitações relativas à visualização espacial de um objeto;
- determinação das propriedades geométricas deste objeto;
- estruturação matemática das propriedades do objeto.

É óbvio que a estruturação matemática das propriedades do objeto necessita de ferramentas da álgebra. A visualização e as ferramentas de medição são fundamentais para a descoberta de propriedades geométricas, **mas não se pode provar estas propriedades com base em figuras.**

Metodologias tais como verificar se uma afirmação é precisa ou verdadeira, refutando afirmações falsas com contra-exemplos e reformulando-as de forma a tornarem-se verdadeiras, auxiliam no desenvolvimento dos três aspectos citados.

Neste contexto, **se utilizada de forma adequada**, a informática pode ser uma poderosa ferramenta para o ensino.:

É óbvio que a estruturação matemática das propriedades do objeto necessita de ferramentas da álgebra. A visualização e as ferramentas de medição são fundamentais para a descoberta de propriedades geométricas, **mas não se pode provar estas propriedades com base em figuras.**

Metodologias tais como verificar se uma afirmação é precisa ou verdadeira, refutando afirmações falsas com contra-exemplos e reformulando-as de forma a tornarem-se verdadeiras, auxiliam no desenvolvimento dos três aspectos citados.

Neste contexto, **se utilizada de forma adequada**, a informática pode ser uma poderosa ferramenta para o ensino.:

É óbvio que a estruturação matemática das propriedades do objeto necessita de ferramentas da álgebra. A visualização e as ferramentas de medição são fundamentais para a descoberta de propriedades geométricas, **mas não se pode provar estas propriedades com base em figuras.**

Metodologias tais como verificar se uma afirmação é precisa ou verdadeira, refutando afirmações falsas com contra-exemplos e reformulando-as de forma a tornarem-se verdadeiras, auxiliam no desenvolvimento dos três aspectos citados.

Neste contexto, **se utilizada de forma adequada**, a informática pode ser uma poderosa ferramenta para o ensino.:

Quando se opta por introduzir *softwares de Geometria Dinâmica* no ensino, corre-se o risco do vício da construção pela construção, perdendo-se o objetivo de explorar os conceitos matemáticos envolvidos.

É necessário que se tenha sempre em mente que o software é *o meio* e não a *finalidade* da aprendizagem.

Quando se opta por introduzir *softwares de Geometria Dinâmica* no ensino, corre-se o risco do vício da construção pela construção, perdendo-se o objetivo de explorar os conceitos matemáticos envolvidos.

É necessário que se tenha sempre em mente que o software é *o meio* e não a *finalidade* da aprendizagem.

Utilizamos fortemente **conceitos de Álgebra para fundamentar construções geométricas** envolvendo rotações no espaço tridimensional e a respectiva projeção na plataforma bidimensional do GeoGebra.

Realizamos um estudo das rotações, vistas como uma transformação ortogonal, e as **implicações do teorema de Euler para corpos rígidos**.

Utilizamos ferramentas da geometria para **manipular objetos matemáticos** e curvas de Jordan para **desenhar contornos e visualizar superfícies tridimensionais**.

Realizamos um estudo das rotações, vistas como uma transformação ortogonal, e as **implicações do teorema de Euler para corpos rígidos**.

Utilizamos ferramentas da geometria para **manipular objetos matemáticos** e curvas de Jordan para **desenhar contornos e visualizar superfícies tridimensionais**.

Realizamos um estudo das rotações, vistas como uma transformação ortogonal, e as **implicações do teorema de Euler para corpos rígidos**.

Utilizamos ferramentas da geometria para **manipular objetos matemáticos** e curvas de Jordan para **desenhar contornos e visualizar superfícies tridimensionais**.

O conceito de transformação ortogonal

Uma aplicação $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\|g(u).g(v)\| = \|u.v\|$ para todo par $u, v \in \mathbb{R}^3$ é denominada uma **isometria**. Uma transformação $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é denominada **ortogonal** se satisfaz $X(u).X(v) = u.v \forall u, v \in \mathbb{R}^3$. Aqui o ponto denota o produto escalar euclidiano usual.

O conjunto $\{X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : XX^{-1} = I\}$ das **transformações ortogonais** de \mathbb{R}^3 é denominado $O(3)$. Mostra-se que $O(3)$ em relação à operação de composição de funções define um **grupo** e que, se $M \in O(3)$, então existe uma **base ortonormal** na qual a representação de M é dada por,

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Rotação de eixos em \mathbb{R}^2

Consideremos o sistema de coordenadas xOy e um sistema de coordenadas $x'Oy'$ obtido por uma rotação de um ângulo α , no sentido anti-horário, sobre o sistema xOy .

Seja P , um ponto no plano cartesiano, então podemos escrever:

$$\begin{cases} P = P(x, y) \text{ no sistema } xOy, \\ P = P(x', y') \text{ no sistema } x'Oy'. \end{cases}$$

O nosso objetivo é escrever x' e y' em função de x , y e do ângulo α .

Rotação de eixos em \mathbb{R}^2

Consideremos o sistema de coordenadas xOy e um sistema de coordenadas $x'Oy'$ obtido por uma rotação de um ângulo α , no sentido anti-horário, sobre o sistema xOy .

Seja P , um ponto no plano cartesiano, então podemos escrever:

$$\begin{cases} P = P(x, y) \text{ no sistema } xOy, \\ P = P(x', y') \text{ no sistema } x'Oy'. \end{cases}$$

O nosso objetivo é escrever x' e y' em função de x , y e do ângulo α .

Rotação de eixos em \mathbb{R}^2

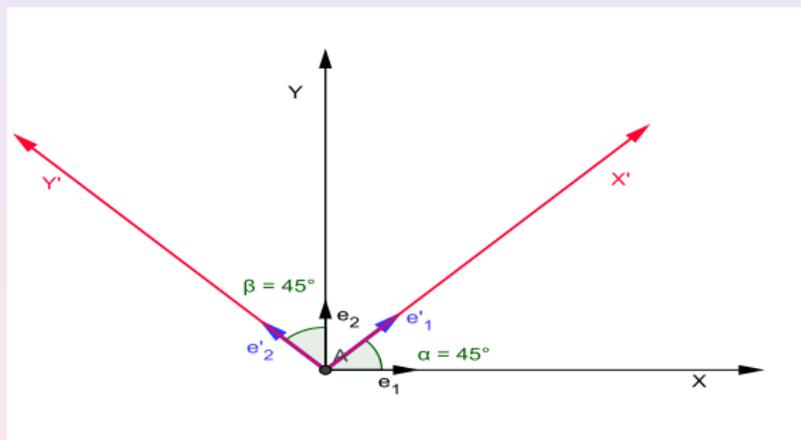
Consideremos o sistema de coordenadas xOy e um sistema de coordenadas $x'Oy'$ obtido por uma rotação de um ângulo α , no sentido anti-horário, sobre o sistema xOy .

Seja P , um ponto no plano cartesiano, então podemos escrever:

$$\begin{cases} P = P(x, y) \text{ no sistema } xOy, \\ P = P(x', y') \text{ no sistema } x'Oy'. \end{cases}$$

O nosso objetivo é escrever x' e y' em função de x , y e do ângulo α .

Rotação de eixos em \mathbb{R}^2



Rotação de eixos em \mathbb{R}^2

Sejam $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ os vetores unitários nas direções dos eixos x e y ; e e'_1, e'_2 os vetores unitários na direção dos eixos x' e y' . (introduzir sem rigor conceito de base e orientação)

Utilizando o fato de que (x, y) pode ser escrito de forma única como combinação linear dos vetores das bases de \mathbb{R}^2 (aqui pode-se utilizar conceito de soma de vetores), segue que

$$\begin{aligned}(x, y) &= xe_1 + ye_2 \\ (x', y') &= x'e'_1 + y'e'_2,\end{aligned}\tag{2}$$

das regras para senos e cossenos de somas segue que

$$e'_2 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)\tag{3}$$

Rotação de eixos em \mathbb{R}^2

Sejam $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ os vetores unitários nas direções dos eixos x e y ; e e'_1, e'_2 os vetores unitários na direção dos eixos x' e y' . (introduzir sem rigor conceito de base e orientação)

Utilizando o fato de que (x, y) pode ser escrito de forma única como **combinação linear** dos vetores das bases de \mathbb{R}^2 (aqui pode-se utilizar conceito de soma de vetores), segue que

$$\begin{aligned}(x, y) &= xe_1 + ye_2 \\ (x', y') &= x'e'_1 + y'e'_2,\end{aligned}\tag{2}$$

das regras para senos e cossenos de somas segue que

$$e'_2 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)\tag{3}$$

Rotação de eixos em \mathbb{R}^2

Sejam $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ os vetores unitários nas direções dos eixos x e y ; e e'_1, e'_2 os vetores unitários na direção dos eixos x' e y' . (introduzir sem rigor conceito de base e orientação)

Utilizando o fato de que (x, y) pode ser escrito de forma única como **combinação linear** dos vetores das bases de \mathbb{R}^2 (aqui pode-se utilizar conceito de soma de vetores), segue que

$$\begin{aligned}(x, y) &= xe_1 + ye_2 \\ (x', y') &= x'e'_1 + y'e'_2,\end{aligned}\tag{2}$$

das regras para senos e cossenos de somas segue que

$$e'_2 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)\tag{3}$$

Rotação de eixos em \mathbb{R}^2

de (2) e do fato de que (x, y) e (x', y') são as coordenadas do mesmo ponto P , obtém-se que,

$$\begin{aligned}xe_1 + ye_2 &= x'e'_1 + y'e'_2 = \\ &= x'(\cos(\alpha)e_1 + \sin(\alpha)e_2) + y'(-\sin \alpha e_1 + \cos \alpha e_2), \\ &= (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)e_1 + (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)e_2,\end{aligned}$$

o que resulta

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad (4)$$

Rotação de eixos em \mathbb{R}^2

de (2) e do fato de que (x, y) e (x', y') são as coordenadas do mesmo ponto P , obtém-se que,

$$\begin{aligned}xe_1 + ye_2 &= x'e'_1 + y'e'_2 = \\ &= x'(\cos(\alpha)e_1 + \sin(\alpha)e_2) + y'(-\sin \alpha e_1 + \cos \alpha e_2), \\ &= (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)e_1 + (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)e_2,\end{aligned}$$

o que resulta

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad (4)$$

Rotação de eixos em \mathbb{R}^2

Segue de (4) que uma matriz que descreve uma rotação de um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ por um ângulo α , no sentido anti-horário, pode ser escrita da seguinte forma

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Prova-se que a matriz R não depende da base ortogonal $\{e_1, e_2\}$ (pode-se mostrar geometricamente, usando o geogebra, sem falar em base).

Rotação de eixos em \mathbb{R}^2

Segue de (4) que uma matriz que descreve uma rotação de um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ por um ângulo α , no sentido anti-horário, pode ser escrita da seguinte forma

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Prova-se que a matriz R não depende da base ortogonal $\{e_1, e_2\}$ (pode-se mostrar geometricamente, usando o geogebra, sem falar em base).

Rotação de um vetor em torno de um eixo em \mathbb{R}^3

Em espaços bidimensionais temos **um único grau de liberdade de orientação**, ou seja, para efetuar uma rotação precisamos determinar **apenas o ângulo de rotação**. Já em espaços tridimensionais temos **dois graus de liberdade** e nesse caso precisamos determinar o **ângulo da rotação** e o **eixo** em torno do qual ela deve ocorrer.

Rotação de eixos em \mathbb{R}^3

De (4) seguem, as equações para uma rotação anti-horária em torno do eixo Ox positivo, por um ângulo α :

$$\begin{cases} w_1 = x \\ w_2 = y \cos \alpha - z \sin \alpha \\ w_3 = y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{cases} \quad (6)$$

A matriz canônica correspondente é:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (7)$$

Rotação de eixos em \mathbb{R}^3

De (4) seguem, as equações para uma rotação anti-horária em torno do eixo Ox positivo, por um ângulo α :

$$\begin{cases} w_1 = x \\ w_2 = y \cos \alpha - z \sin \alpha \\ w_3 = y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{cases} \quad (6)$$

A matriz canônica correspondente é:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (7)$$

Rotação de eixos em \mathbb{R}^3

De (4) seguem, as equações para uma rotação anti-horária em torno do eixo Ox positivo, por um ângulo α :

$$\begin{cases} w_1 = x \\ w_2 = y \cos \alpha - z \sin \alpha \\ w_3 = y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{cases} \quad (6)$$

A matriz canônica correspondente é:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (7)$$

Rotação de um vetor em torno de um eixo em \mathbb{R}^3

Pode-se obter também um sistema de equações para realizar uma rotação anti-horária em torno do eixo Oy positivo, por um ângulo β , ou em torno do eixo Oz positivo, por um ângulo γ .

Rotação de um vetor em torno de um eixo em \mathbb{R}^3

Se efetuarmos o produto das matrizes obtidas por rotações em torno do eixo x , y e z obtemos uma nova matriz

$R_{xyz} = R_x R_y R_z$; esta nova matriz depende dos ângulos α , β e γ , que determinam o ângulo de rotação em torno dos eixos coordenados x , y e z respectivamente.

$$R_{xyz} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta \\ -\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (8)$$

Usando a teoria descrita para estudar o Teorema de Euler para corpos rígidos

Teorema:[Euler] O movimento geral de um corpo rígido, que possua um ponto fixo pode ser descrito como uma rotação em torno de algum eixo.

A ordem de escolha dos eixos para as rotações é arbitrária. No entanto, é válido ressaltar que existe uma restrição na qual o mesmo eixo não pode ser escolhido duas vezes em sequência nas rotações. De maneira geral, as rotações são mencionadas por meio dos números 1,2 e 3, que respectivamente, denotam os eixos coordenados x,y e z .

Usando a teoria descrita para estudar o Teorema de Euler para corpos rígidos

Teorema:[Euler] O movimento geral de um corpo rígido, que possua um ponto fixo pode ser descrito como uma rotação em torno de algum eixo.

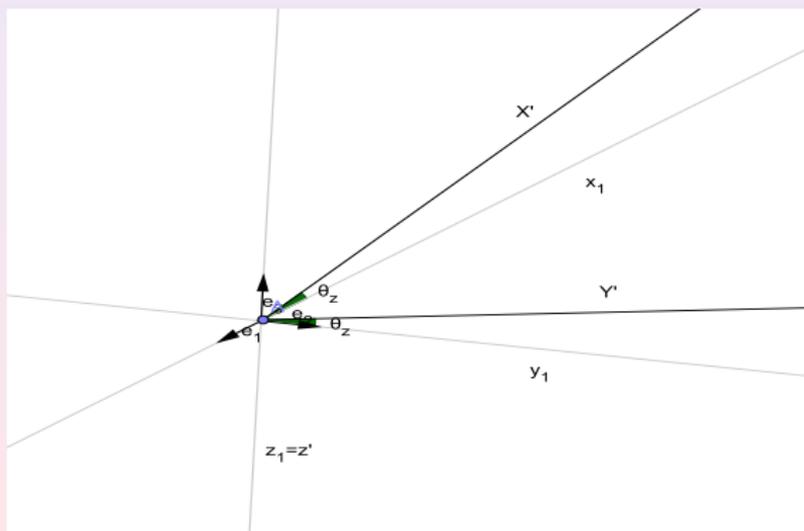
A ordem de escolha dos eixos para as rotações é arbitrária. No entanto, é válido ressaltar que existe uma restrição na qual o mesmo eixo não pode ser escolhido duas vezes em sequência nas rotações. De maneira geral, as rotações são mencionadas por meio dos números 1,2 e 3, que respectivamente, denotam os eixos coordenados x,y e z .

Teorema de Euler para corpos rígidos

Existem doze tipos de rotações asseguradas pelo Teorema de Euler, que são: 123, 121, 131, 132, 213, 212, 231, 232, 312, 313, 321 e 323, considerando os números 1,2 e 3, que respectivamente, denotam os eixos coordenados x,y e z. Os ângulos formados por estas rotações são conhecidos em Geometria como Ângulos de Euler.

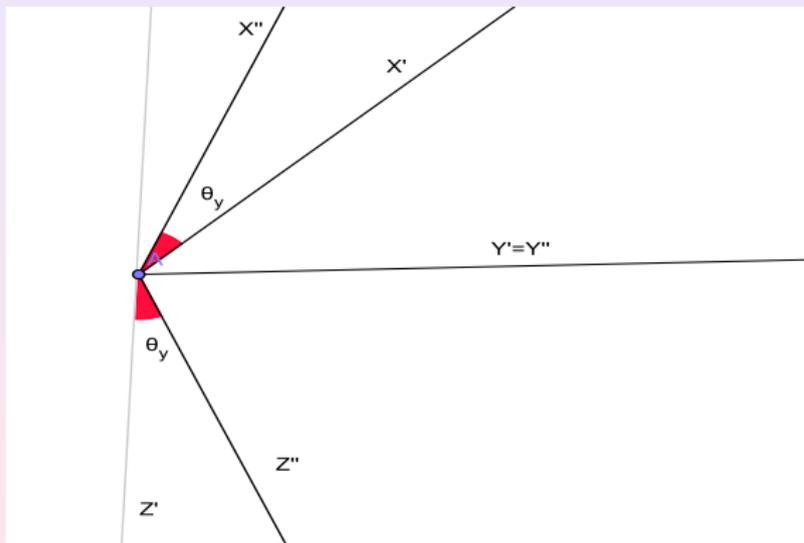
Teorema de Euler para corpos rígidos

A ordem de rotações mais utilizada é 321, ou seja, z y x, sendo esta a ordem das rotações dos eixos coordenados. A rotação será de um ângulo θ_z , mantendo fixo o eixo $z_1 = z'$ a qual pode ser descrita pela figura seguinte:



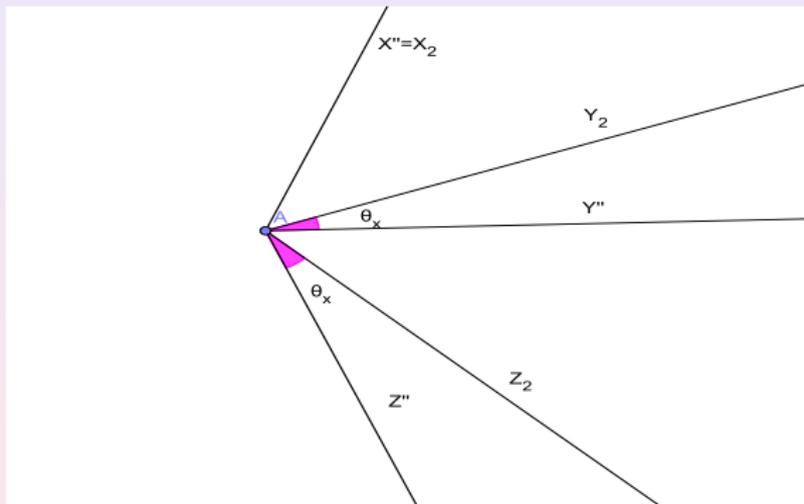
Teorema de Euler para corpos rígidos

A próxima rotação é a rotação de um ângulo θ_y , mantendo fixo o eixo $y' = y''$ a qual pode ser descrita pela figura seguinte:



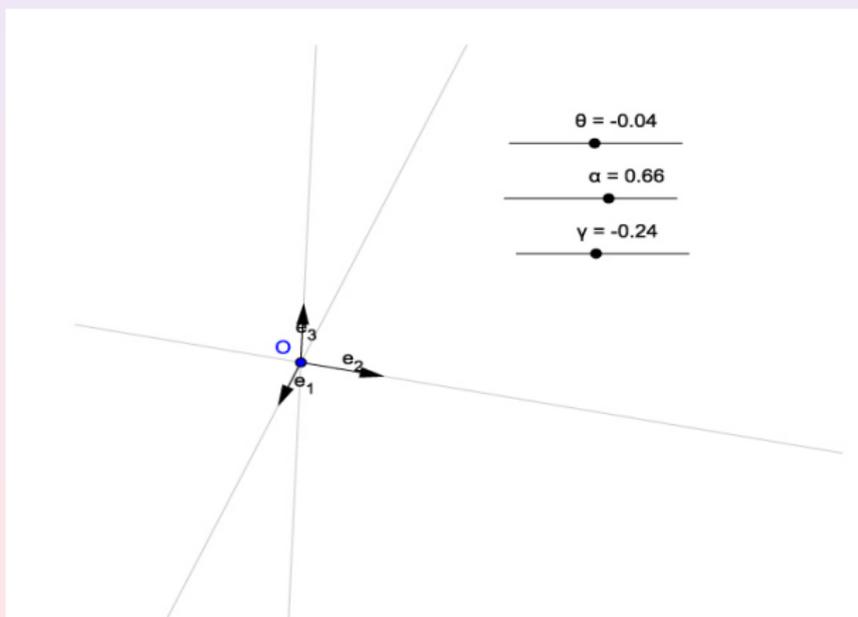
Teorema de Euler para corpos rígidos

A última rotação é a rotação de um ângulo θ_x , mantendo fixo o eixo $x'' = x_2$ a qual pode ser descrita pela figura seguinte:

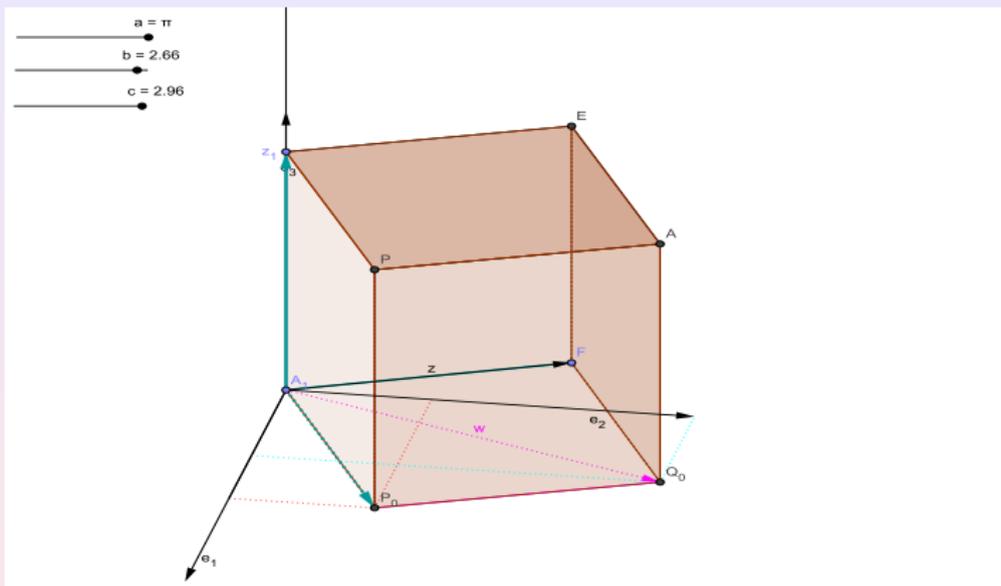


Simulando um ambiente 3D com ângulos de Euler

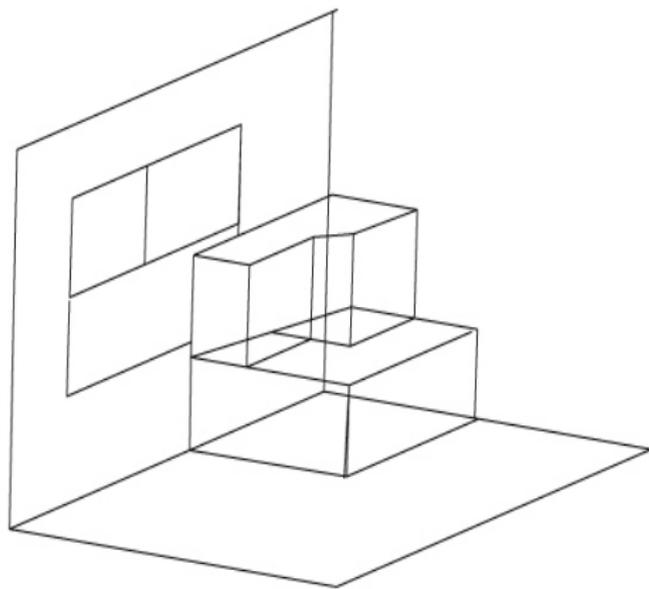
Podemos utilizar os ângulos de Euler para simular um ambiente tridimensional no software GeoGebra, a partir de uma plataforma bidimensional, por meio da realização das rotações em \mathbb{R}^3 apresentadas neste trabalho, as quais constituem o objeto de nosso estudo.



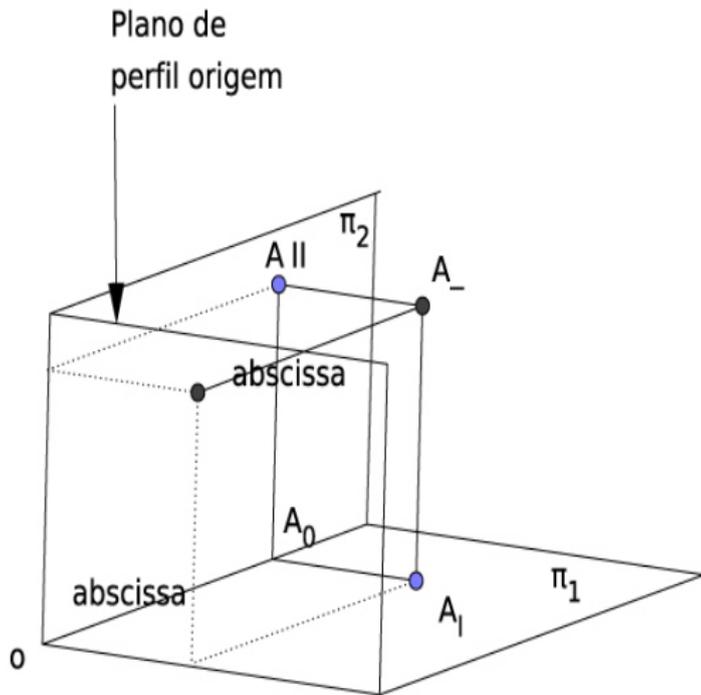
Usando o ambiente 3D para simular paralelepípedos em \mathbb{R}^3



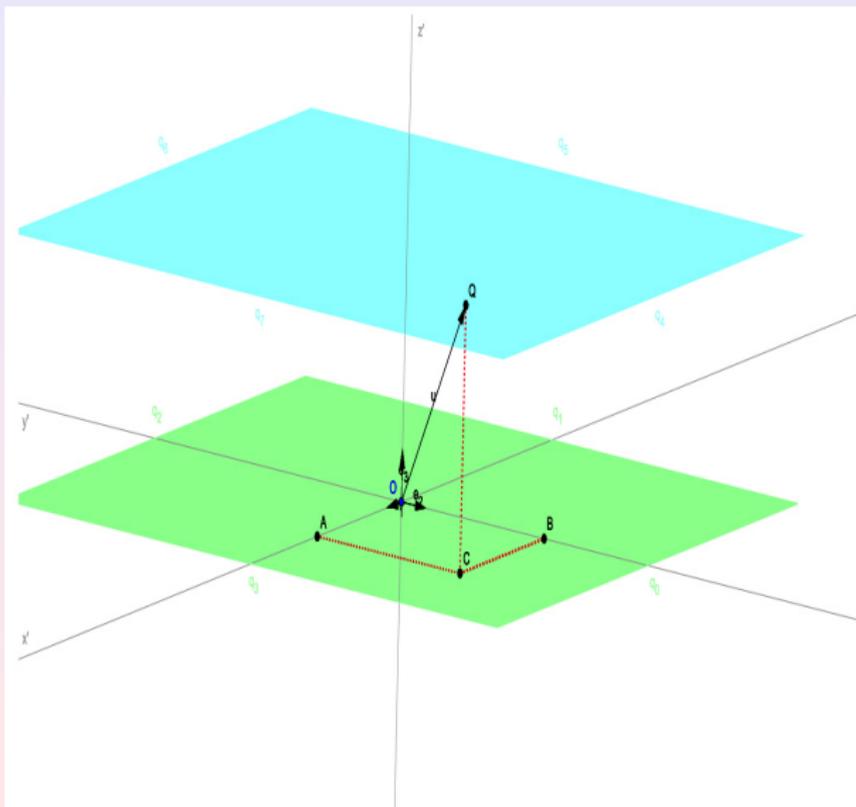
Usando o ambiente 3D (simulado) para fazer projeções em Geometria descritiva



Usando o ambiente 3D (simulado) para fazer projeções em Geometria descritiva



Usando o ambiente 3D para simular planos paralelos em \mathbb{R}^3



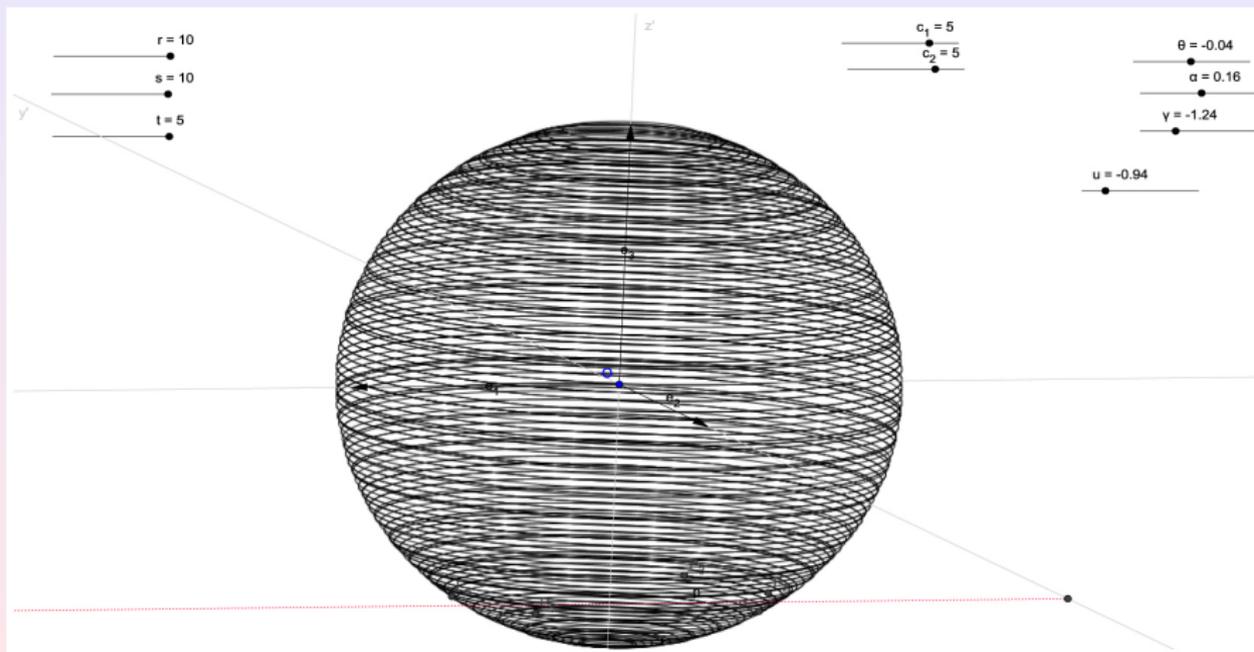
Usando o ambiente 3D (simulado) para curvas de nível em \mathbb{R}^3

Pode-se ainda utilizar a teoria descrita para esboçar as curvas de nível de algumas superfícies. Para isto criamos um seletor u definido em um intervalo I da reta real. Escolhemos cinco pontos de mesma coordenada z da superfície. Definimos então uma cônica determinada por estes 5 pontos (utilize a ferramenta *cônica definida por 5 pontos* para desenhar a curva).

Exemplo:

Considerando as função $y' = f(u)$ e $z' = g(u)$ pode-se determinar em \mathbb{R}^3 um conjunto S obtido ao se girar a curva plana $(0, f(v), g(v))$ em torno de um eixo. Vamos considerar que a curva plana encontra-se no plano $y'z'$ e a rotação ocorre em torno do eixo z' . Simularemos a construção de uma esfera no nosso sistema de coordenadas $x'Oy'Oz'$.

Usando o ambiente 3D para curvas de nível em \mathbb{R}^3



-  Medeiros, N. A. C. de , Ripoll, J. B.; *Hipersuperfícies invariantes de curvatura média constante*; Matemática Universitária, n.º 13 junho de 1991, 39-63.
-  Lima, E. L.; *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, IMPA, 1998, Rio de Janeiro.
-  Lima, Elon Lages; *Álgebra Linear*, terceira edição. SBM, Coleção Matemática Universitária, (1998).
-  Newmann, de W. M. e Sproull, R. F.; *Principles of Interactive Computer Graphics*, 1979, editora McGraw-Hill, Nova Iorque.
-  Murray, R. M., Zexiang Li, Sastry, S. S.; *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*; CRC Press, Berkeley; 1994.