O Método das Tangentes de Newton:

uma abordagem que associa história e tecnologia com o uso do *software* Geogebra

Marcio Vieira de Almeida
Naíma Soltau Ferrão
Silvio de Brito Marcelino

Apresentação

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Mestrado Acadêmico em Educação Matemática

Autores

Márcio Vieira de Almeida

Naíma Soltau Ferrão

Silvio de Brito Marcelino

Novembro 2011

Grupos e Temas

- Estratégias de Ensino e Aprendizagem na Educação Matemática Superior
- Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral com apoio computacional

Síntese da Apresentação

1. Cálculo Diferencial: Isaac Newton e o contexto histórico nos livros didáticos

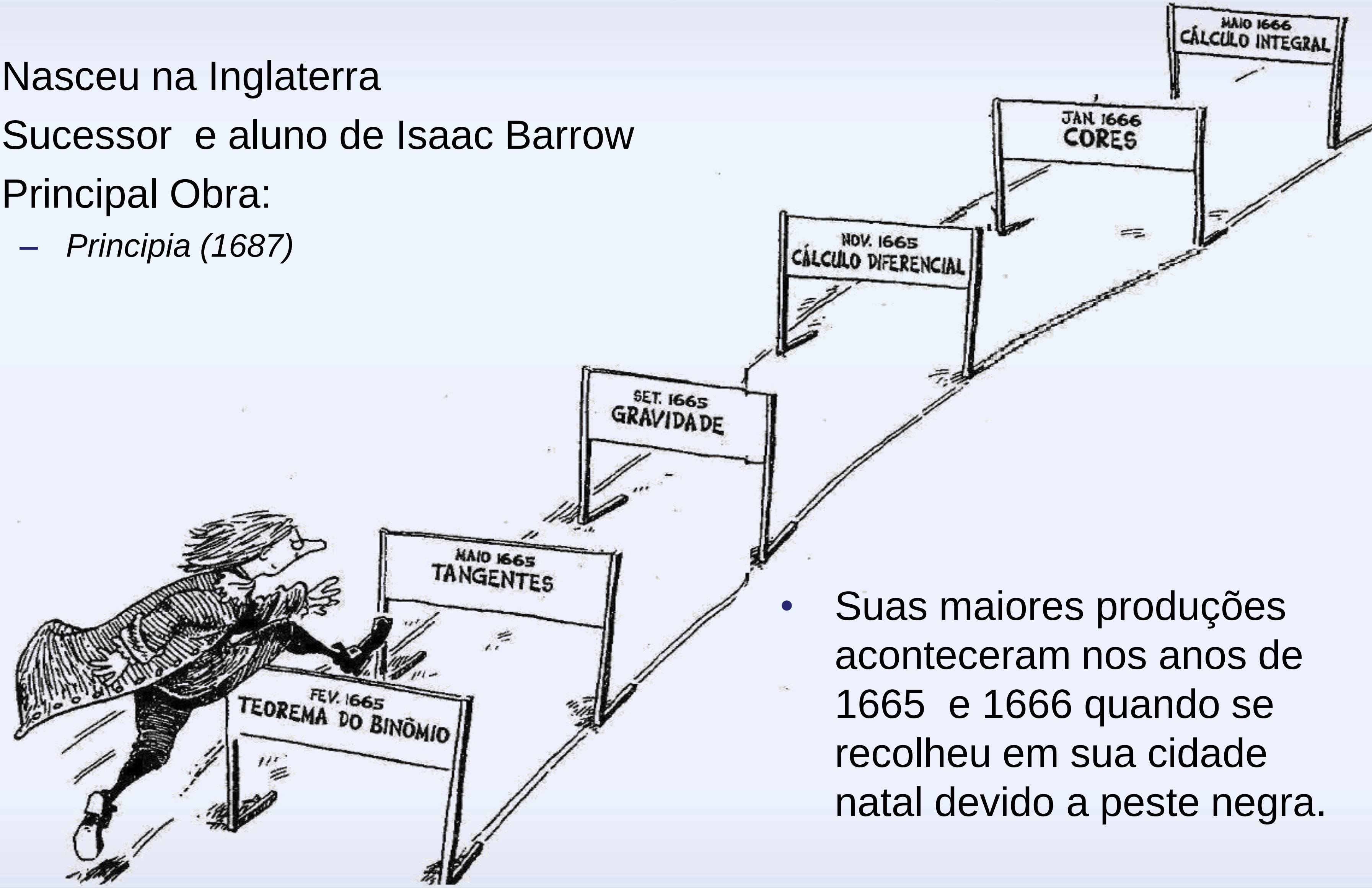
2. Descrição do Método das Tangentes de Newton com apoio do *software* GeoGebra

Cálculo Diferencial

Isaac Newton e o contexto histórico nos livros didáticos

Isaac Newton (1642-1727)

- Nasceu na Inglaterra
- Sucessor e aluno de Isaac Barrow
- Principal Obra:
  - *Principia (1687)*



- Suas maiores produções aconteceram nos anos de 1665 e 1666 quando se recolheu em sua cidade natal devido a peste negra.

Fig. 1 (POSKITT, 2001, p.40-41)

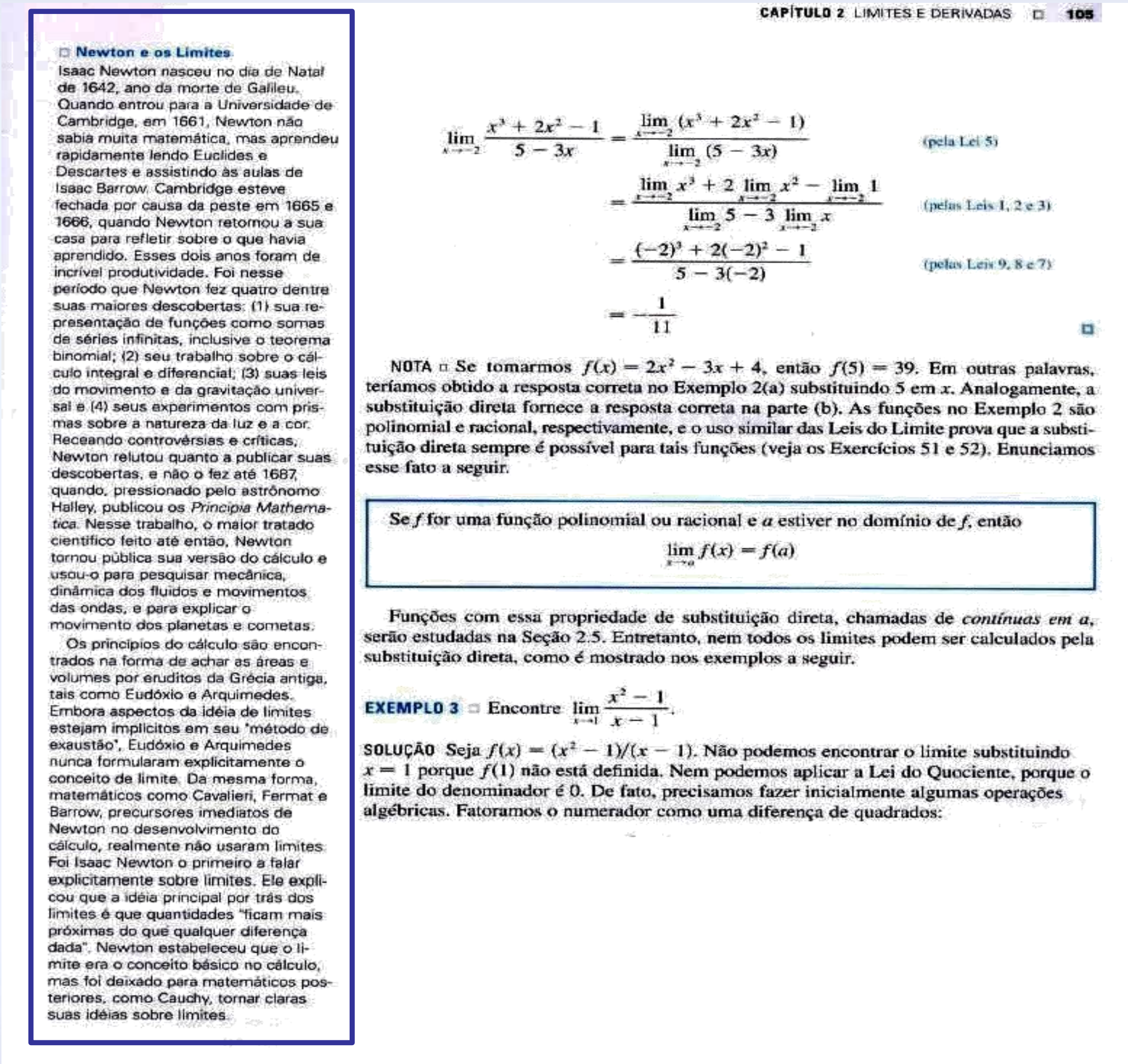
Cálculo Diferencial

- Newton e Leibniz
  - seus métodos analíticos unificaram muitas técnicas e métodos para resolver problemas na época

- O Cálculo surge da tentativa de responder aos problemas científicos do sec. XVII
  - Problema da Quadratura.
  - Problemas da Tangente: determinação da tangente a uma curva .
  - Séries infinitas.

(BOYER, 1974,p.287)

A abordagem histórica do cálculo nos livros didáticos



□ Newton e os Limites

Isaac Newton nasceu no dia de Natal de 1642, ano da morte de Galileu. Quando entrou para a Universidade de Cambridge, em 1661, Newton não sabia muita matemática, mas aprendeu rapidamente lendo Euclides e Descartes e assistindo às aulas de Isaac Barrow. Cambridge esteve fechada por causa da peste em 1665 e 1666, quando Newton retornou a sua casa para refletir sobre o que havia aprendido. Esses dois anos foram de incrível produtividade. Foi nesse período que Newton fez quatro dentre suas maiores descobertas: (1) sua representação de funções como somas de séries infinitas, inclusive o teorema binomial; (2) seu trabalho sobre o cálculo integral e diferencial; (3) suas leis do movimento e da gravitação universal e (4) seus experimentos com prismas sobre a natureza da luz e a cor. Receando controvérsias e críticas, Newton relutou quanto a publicar suas descobertas, e não o fez até 1687, quando, pressionado pelo astrônomo Halley, publicou os *Principia Mathematica*. Nesse trabalho, o maior tratado científico feito até então, Newton tornou pública sua versão do cálculo e usou-o para pesquisar mecânica, dinâmica dos fluidos e movimentos das ondas, e para explicar o movimento dos planetas e cometas.

Os princípios do cálculo são encontrados na forma de achar as áreas e volumes por eruditos da Grécia antiga, tais como Eudóxio e Arquimedes. Embora aspectos da idéia de limites estejam implícitos em seu "método de exaustão", Eudóxio e Arquimedes nunca formularam explicitamente o conceito de limite. Da mesma forma, matemáticos como Cavalieri, Fermat e Barrow, precursores imediatos de Newton no desenvolvimento do cálculo, realmente não usaram limites. Foi Isaac Newton o primeiro a falar explicitamente sobre limites. Ele explicou que a idéia principal por trás dos limites é que quantidades "ficam mais próximas do que qualquer diferença dada". Newton estabeleceu que o limite era o conceito básico no cálculo, mas foi deixado para matemáticos posteriores, como Cauchy, tornar claras suas idéias sobre limites.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}=\frac{\lim_{x\to-2}(x^3+2x^2-1)}{\lim_{x\to-2}(5-3x)} \quad \text{(pela Lei 5)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to-2}x^3+2\lim_{x\to-2}x^2-\lim_{x\to-2}1}{\lim_{x\to-2}5-3\lim_{x\to-2}x} \quad \text{(pelas Leis 1, 2 e 3)}$$

$$=\frac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)} \quad \text{(pelas Leis 9, 8 e 7)}$$

$$=-\frac{1}{11} \quad \square$$

NOTA □ Se tomarmos $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, então $f(5) = 39$. Em outras palavras, teríamos obtido a resposta correta no Exemplo 2(a) substituindo 5 em x. Analogamente, a substituição direta fornece a resposta correta na parte (b). As funções no Exemplo 2 são polinomial e racional, respectivamente, e o uso similar das Leis do Limite prova que a substituição direta sempre é possível para tais funções (veja os Exercícios 51 e 52). Enunciamos esse fato a seguir.

> Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f, então
> $$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Funções com essa propriedade de substituição direta, chamadas de *contínuas em a*, serão estudadas na Seção 2.5. Entretanto, nem todos os limites podem ser calculados pela substituição direta, como é mostrado nos exemplos a seguir.

EXEMPLO 3 □ Encontre $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$.

SOLUÇÃO Seja $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. Não podemos encontrar o limite substituindo $x = 1$ porque $f(1)$ não está definida. Nem podemos aplicar a Lei do Quociente, porque o limite do denominador é 0. De fato, precisamos fazer inicialmente algumas operações algébricas. Fatoramos o numerador como uma diferença de quadrados:

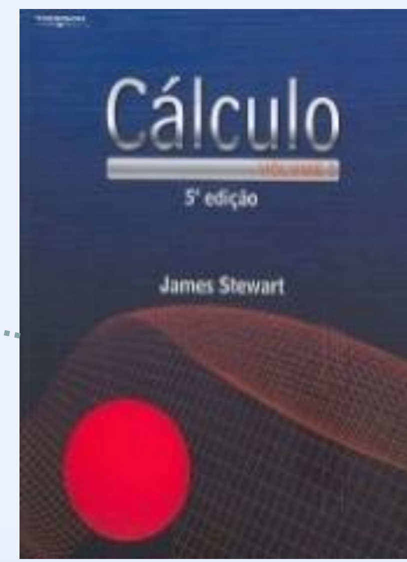
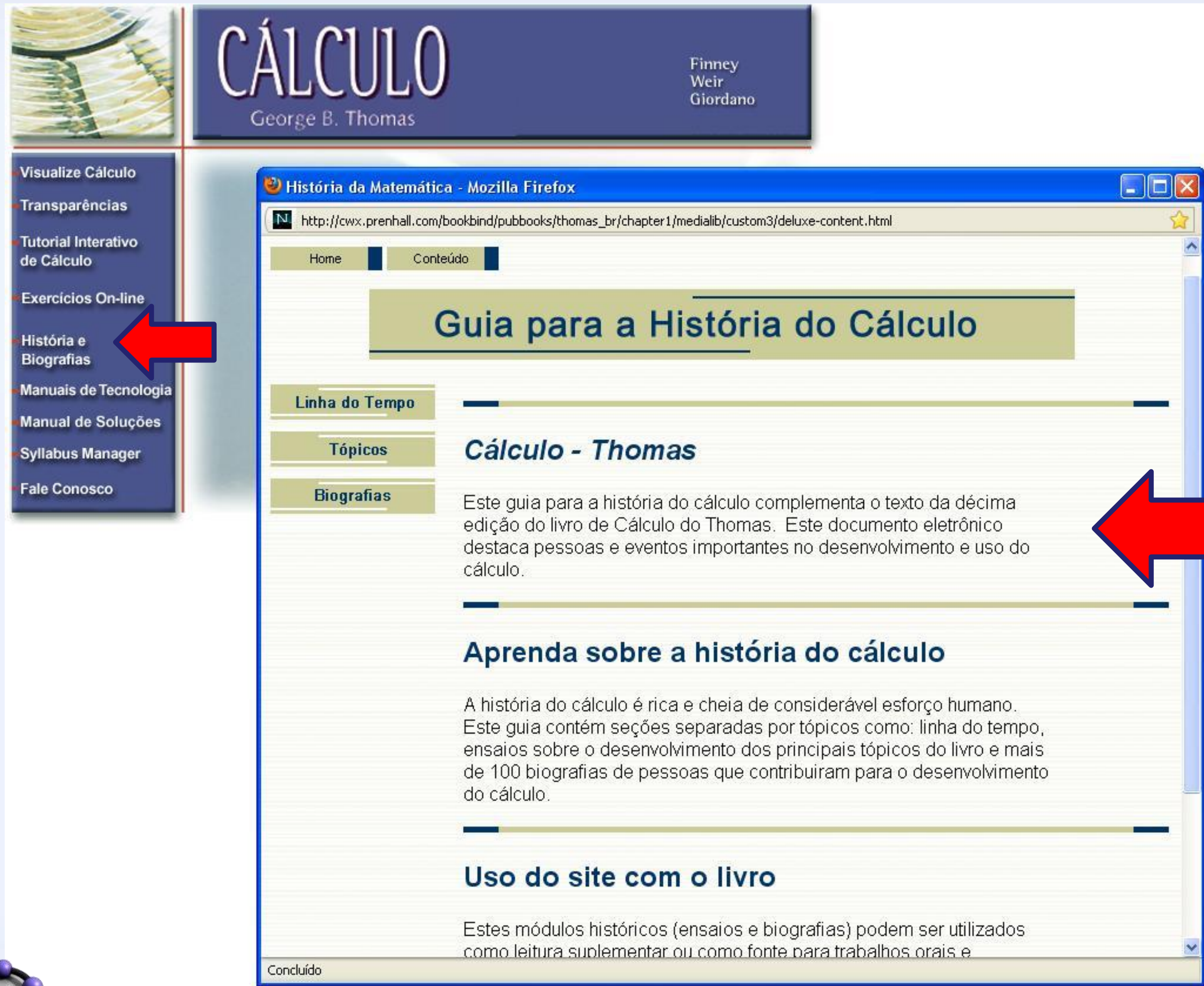


Fig. 2 (STEWART, 2009, p.105)

A abordagem histórica do cálculo nos livros didáticos



Fonte: *Companion website*

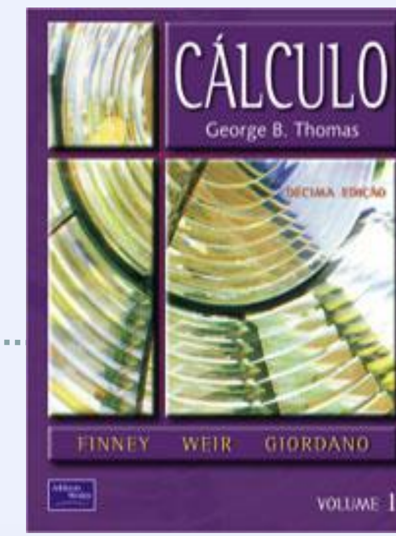


Fig. 3 (THOMAS , 2008)

A abordagem histórica do cálculo nos livros didáticos

■ **DIFERENCIAIS**

Quando Newton e Leibniz publicaram suas descobertas de Cálculo, utilizaram notações distintas e, assim, acabaram criando uma grande divisão notacional entre a Grã-Bretanha e o continente europeu, que durou mais de 50 anos. A ***notação de Leibniz***, a saber, dy/dx, acabou prevalecendo por naturalmente sugerir fórmulas corretas, como, por exemplo, a regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Até este ponto, sempre interpretamos dy/dx como uma única entidade, representando a derivada de y em relação a x; os símbolos "dy" e "dx", que são denominados ***diferenciais***, não tinham sentido algum associado. Nosso próximo objetivo é definir esses símbolos de tal modo que dy/dx possa ser tratado como uma autêntica razão. Para isso, vamos considerar que f seja diferenciável em um ponto x, *definir* dx como variável independente que possa ter qualquer valor real e vamos *definir* dy pela fórmula

$$dy = f'(x)\,dx \qquad (5)$$

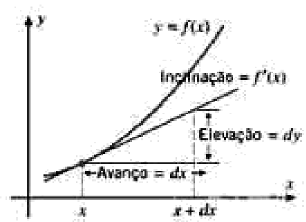


Figura 3.8.5

Se $dx \neq 0$, então podemos dividir ambos os lados de (5) por dx para obter

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad (6)$$

Assim, alcançamos nosso objetivo de definir dy e dx de tal forma que sua razão seja $f'(x)$. Dizemos que a Fórmula (5) expressa (6) em ***forma diferencial***.

Para interpretar (5) geometricamente, observe que $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em x. As diferenciais dy e dx podem ser vistas como uma correspondente elevação e avanço dessa reta tangente (Figura 3.8.5).

▶ **Exemplo 3** Expresse a derivada em relação a x de $y = x^2$ em forma diferencial e discuta a relação entre dy e dx em $x = 1$.

Solução A derivada de y em relação a x é $dy/dx = 2x$, que pode ser expressa em forma diferencial por

$$dy = 2x\,dx$$

Tomando $x = 1$, resulta

$$dy = 2\,dx$$

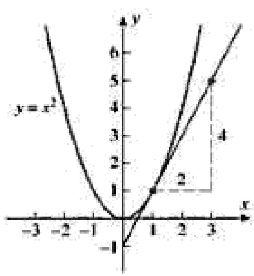


Figura 3.8.6

Isso significa que, se percorrermos a reta tangente à curva $y = x^2$ em $x = 1$, então uma variação de dx unidades em x produz uma variação de 2 dx unidades em y. Assim, por exemplo, um avanço de $dx = 2$ unidades produz uma elevação de $dy = 4$ unidades ao longo da reta tangente (Figura 3.8.6). ◀

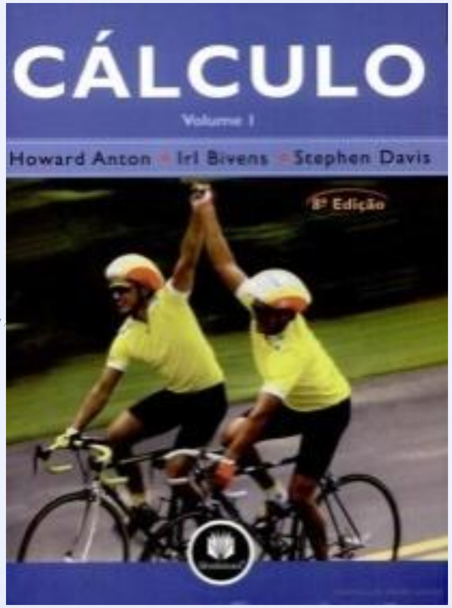


Fig. 4 (ANTON, 2000, p.226)

A abordagem histórica do cálculo nos livros didáticos

O símbolo $\frac{dy}{dx}$ como notação para a derivada foi introduzido pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). No século dezessete Leibniz e Sir Isaac Newton (1642-1727), trabalhando independentemente, introduziram quase ao mesmo tempo o conceito de derivada. É provável que Leibniz considerasse dx e dy como pequenas variações nas variáveis x e y e a derivada de y em relação a x como a razão de dy por dx quando dy e dx tornam-se pequenos. O conceito de Limite como concebemos atualmente não era conhecido por Leibniz.

Na notação de Lagrange, o valor da derivada em $x = x_1$ é indicado por $f'(x_1)$. Com a notação de Leibniz escreveríamos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$$

Você deve se lembrar que enquanto $\frac{dy}{dx}$ foi usado como notação para derivada, dy e dx não tiveram, neste livro, significado independente, embora mais adiante eles serão definidos em separado. Assim, por enquanto, $\frac{dy}{dx}$ é um símbolo para a derivada e não deve ser considerado como uma razão. Na verdade, $\frac{d}{dx}$ pode ser considerado como um operador (um símbolo para a operação de cálculo da derivada) e quando escrevemos $\frac{dy}{dx}$, isto significa $\frac{d}{dx}(y)$, ou seja, a derivada de y em relação a x.

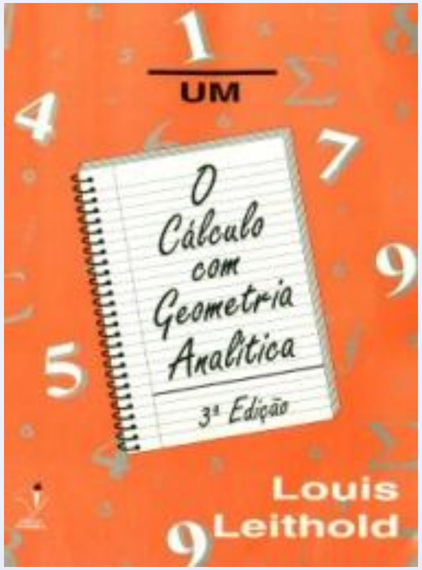


Fig. 5 (LEITHOLD, 2004, p.145)

A abordagem histórica do cálculo nos livros didáticos

MAKRON Books

EDITORA DA UFSC

CAPÍTULO 4

DERIVADA

Neste capítulo, estudaremos a DERIVADA. Veremos, inicialmente, que ela representa a inclinação de uma curva num ponto. Posteriormente, apresentaremos outras aplicações práticas, em diversos ramos da Física, Engenharia, Economia etc.

4.1 A RETA TANGENTE

Vamos definir a inclinação de uma curva $y = f(x)$ para, em seguida, encontrar a equação da reta tangente à curva num ponto dado.

As idéias que usaremos, foram introduzidas no século XVIII, por Newton e Leibnitz.

Seja $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo (a, b), como na Figura 4.1.

Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos distintos da curva $y = f(x)$.

Seja s a reta secante que passa pelos pontos P e Q. Considerando o triângulo retângulo PMQ, na Figura 4.1, temos que a inclinação da reta s (ou coeficiente angular de s) é

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

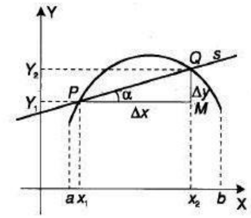


Figura 4-1

Suponhamos agora que, mantendo P fixo, Q se mova sobre a curva em direção a P. Diante disto, a inclinação da reta secante s variará. À medida que Q vai se aproximando cada vez mais de P, a inclinação da secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante (Ver Figura 4.2.).

Esse valor limite, é chamado inclinação da reta tangente à curva no ponto P, ou também inclinação da curva em P.

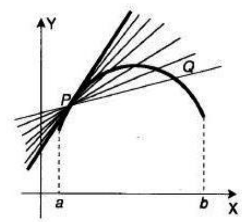


Figura 4-2

4.1.1 Definição. Dada uma curva $y = f(x)$, seja $P(x_1, y_1)$ um ponto sobre ela. A inclinação da reta tangente à curva no ponto P é dada por

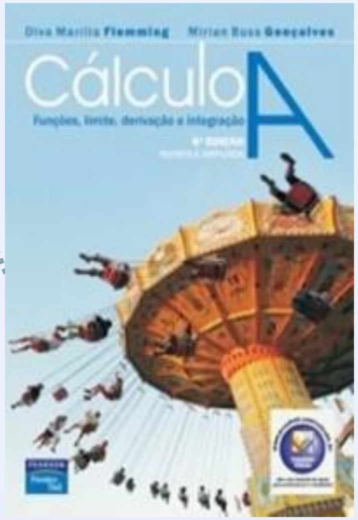


Fig. 6 (FLEMMING, 2006, p.143-144)

Descrição do Método

O Método das Tangentes de Newton com apoio do software GeoGebra

Descrição do Método

- Newton chamou seu método de Método das Fluxões

- Dada a relação entre os fluentes $f(x,y)$, encontrar a relação entre as fluxões.

- Segundo Newton:

> *"Chamando de **fluxões** os aumentos das velocidades dos movimentos, e de **fluentes** às quantidades geradas, esclareci aos poucos (nos anos de 1665 e 1666) o método das fluxões que aproveito aqui na quadratura das curvas".*
>
> (NEWTON, *apud* BARON, 1985, p.31)

Descrição do Método

- Newton se preocupava mais com o fenômeno cinemático em si do que com a simbologia usada na sua representação.

- Notações

a, b, c ...	Constantes
x, y, z ...	Variáveis (fluentes)
p ou $\dot{x}$	Velocidade associada a x (fluxão)
q ou $\dot{y}$	Velocidade associada a y (fluxão)
	Quantidade muito pequena, associada ao tempo
$p.$ ou $\dot{x}.$	Acréscimo da variável x (y)

(BOYER, 1992, p.48-50)

Representação do Método

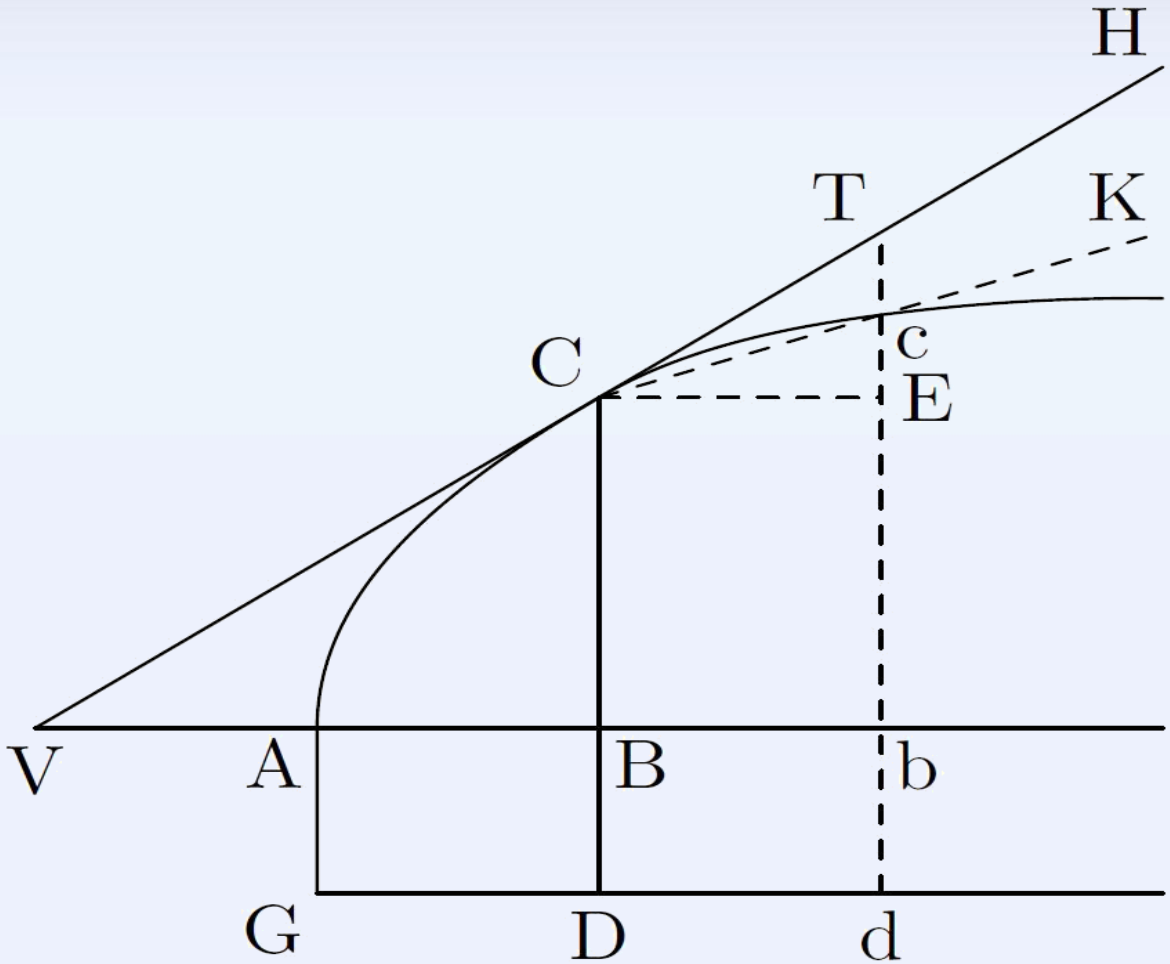
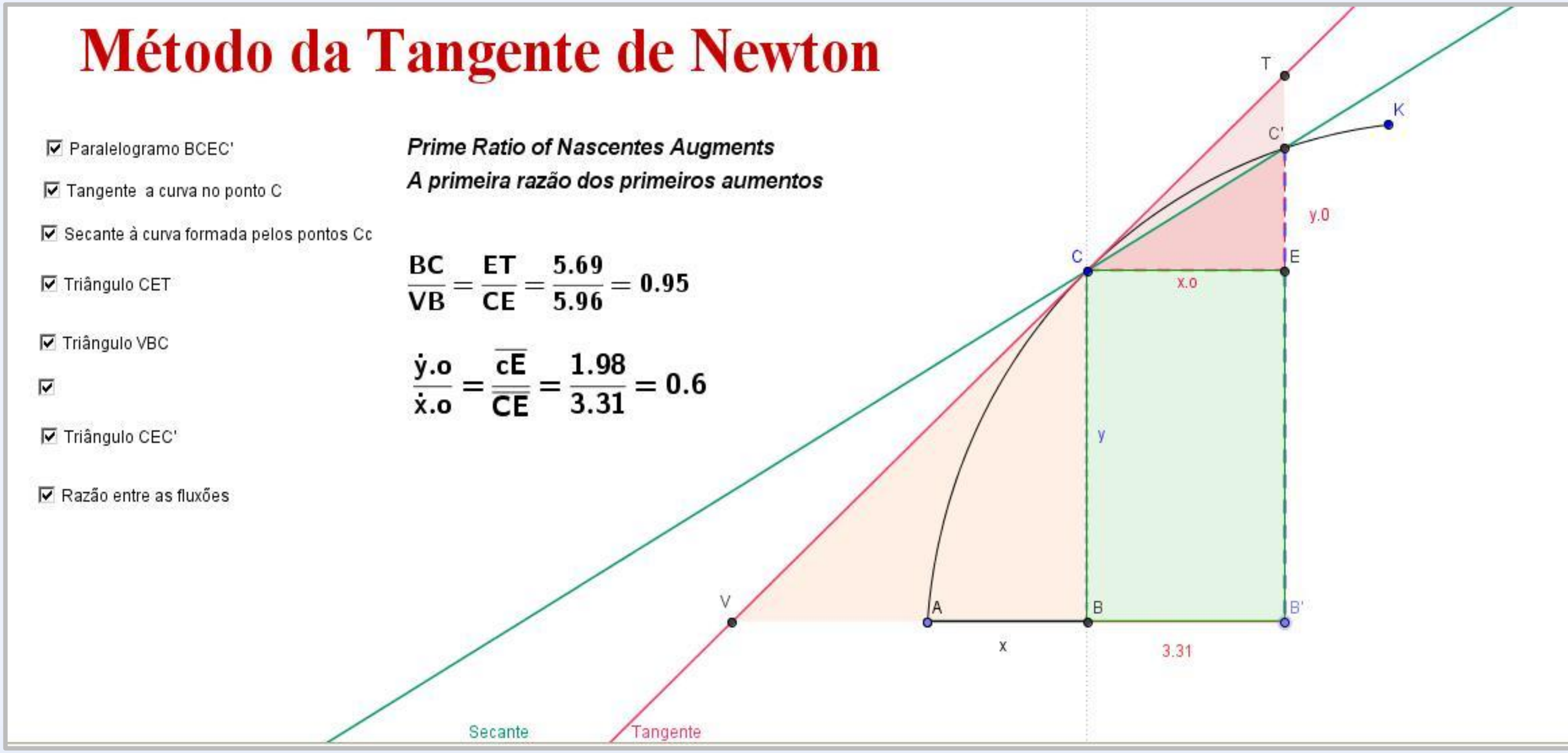


Fig. 7 (BARON, 1985, p.31)

Legenda:

ACK - curva qualquer
VT - tangente à curva no ponto *C*
Cc – corda unindo dois pontos
BC // bc
CE // AB

Representação do Método no *software* GeoGebra



Conclusão

Aliado a facilidade de compreensão e a visualização da construção geométrica introduzidas pelo uso do GeoGebra, o contraponto histórico completa a estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial nas disciplinas matemáticas em cursos do Ensino Superior.

Referências

- ANTON, H.. *Cálculo: um novo horizonte*. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.
- BARON, E.M.; BOS, H.J.M. *Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo (Matemática Grega).* Editora Universidade de Brasília, 1985.
- BOYER, C . B. Cálculo – Tópicos da História da Matemática para uso em sala de aula. v.6. São Paulo: Atual, 1992.
- BOYER, C . B., *História da Matemática*. 2 ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1974.
- Companion Website. http://www.aw-bc.com/thomas_br
- FLEMMING, M. D; GONÇALVES, M.. *Cálculo A: funções, limites, derivação e integração*. 6.ed. São Paulo: Makron, 2006.
- LEITHOLD, L. O *Cálculo com geometria analítica*. v. 1, 3 ed. São Paulo : Harbra, 1994.
- POSKITT, K. *Isaac Newton e sua maçã.* São Paulo: Companhia das Letras, 2001.
- STEWART, J.. *Cálculo*. v.1, 6 ed. São Paulo: Cengage, 2009.
- THOMAS, G. B.. *Cálculo*. v.1, 11 ed.. São Paulo: Addison Wesley, 2008.

Agradecemos a atenção.

Marcio Vieira de Almeida
marcioalmeidasp@gmail.com

Naíma Soltau Ferrão
nsferrao@gmail.com

Silvio de Brito Marcelino
silviodebrito@msn.com