Grande Área: Matemática; Área da Pesquisa: Ensino de Matemática

A COMPLEMENTARIDADE DOS ASPECTOS INTENCIONAL E EXTENSIONAL NA CONCEITUAÇÃO DE NÚMERO REAL: CONSTRUÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

MÁRCIA CRISTINA ALMEIDA TUPINAMBÁ

Curso de Matemática-Licenciatura, modalidade a distância- Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia

PROF. DR. ROGÉRIO FERREIRA DA FONSECA

Curso de Matemática-Licenciatura, modalidade a distância- Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia

RESUMO:

Com base na Teoria desenvolvida pelo matemático inglês John Horton Conway, que conceitua número a partir de cortes, tendo como referência os cortes de Dedekind, porém generalizando-os, podendo ser interpretados como um jogo entre dois jogadores, organizamos uma sequência de atividades propondo uma abordagem diferenciada para conceituar número. Esta nova abordagem por meio de uma classe de jogos, favorece uma visão *complementarista*, que busca estabelecer algumas referências para as noções abstratas além dos axiomas. Para a realização desta pesquisa optou-se por uma abordagem teórica, bibliográfica com enfoque em informações relevantes quanto ao processo de ensino e aprendizagem acerca de número real.

Palavras-Chave:Número Real, Jogo, Aprendizagem

Introdução

Diversas pesquisas desenvolvidas no âmbito da Educação Matemática têm mostrado dificuldades de professores e alunos em relação ao conceito de número, em especial, os números reais, mesmo após o estudo formal deste conteúdo, o que nos levou a explorar a possibilidade de uma nova abordagem por meio de jogos. Tendo como diretriz o projeto de pesquisa desenvolvido pelo professor/orientador, nos familiarizamos com a Teoria de Conway, em especial o jogo Hackenbush, e com base nestes dados, elaboramos uma sequência de atividades voltada aos alunos do Ensino Médio, com o objetivo de dar continuidade à pesquisa desenvolvida por Fonseca (2010).

1.Metodologia

Nossos estudos basearam-se em uma pesquisa bibliográfica, de cunho teórico, não contando com experiências empíricas. Tomamos como inspiração algumas pesquisas como as desenvolvidas por Igliori e Silva (2001) e Moreira e David (2011), tais estudos indicam que os sujeitos (alunos da graduação e futuros professores de matemática) não compreendem o conceito de número real, nos seguintes pontos: definição, representação, propriedade da densidade do conjunto dos números racionais, dos irracionais e dos reais, cardinalidade, a necessidade da criação dos irracionais e completude do conjunto dos números reais. Além disso, o trabalho de Fonseca (2005) nos fornece uma alternativa de abordagem do conceito de número quanto aos aspectos intensional e extensional, destacando as potencialidades das mesmas ao utilizar uma classe de jogos como um modelo de aplicação, conceituando número como um jogo.

Nas abordagens clássicas de número real, por meio das classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais (completamento do Q); por meio dos cortes de Dedekind ou por meio da conceituação do conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo, segundo Fonseca (2010), apenas os aspectos lógicos dedutivos são explorados, não há uma interpretação. Consequentemente só o aspecto intensional dos números fica evidenciado.

> Para propor uma abordagem de acordo com a complementaridade seriam necessários modelos que propiciassem a interpretação dos números reais (cortes ou classes de equivalência de sequências), de suas operações e propriedades, o que permitiria explorar os aspectos extensionais do conceito de número. (FONSECA,2010,p129)

Para termos condições de desenvolvermos nossa pesquisa houve a necessidade do estudo da cardinalidade, das grandezas incomensuráveis, da representação dos números reais, dos cortes de Dedekind, das sequências de Cauchy e para isto nos apoiamos em Lima (2009) e Ávila (2011).

No trabalho realizado por Grando (2000) foram priorizadas as pesquisas com jogos de estratégia, definidos por Corbalán (apud GRANDO, 2000, p.33), como sendo “aqueles onde se desenvolve um ou vários procedimentos típicos de resolução de problemas ou formas habituais de pensamento matemático”. Estes tipos de jogos são importantes porque exigem uma reflexão e uma análise para a elaboração dos procedimentos para resolução das situações problema envolvendo os jogos, possibilitando ao aluno fazer previsões, levantar hipóteses, corrigir jogadas erradas e elaborar as vencedoras.

Para a organização da sequência de atividades, desenvolvemos situações problema com base nos jogos, buscando auxiliar o aprendiz na construção de conhecimentos sobre algumas propriedades dos números, tomamos como base grande parte das dificuldades dos alunos, em relação ao conceito de número, evidenciadas nas pesquisas citadas anteriormente.

Foi feita uma análise inicial de todas as atividades da sequência e por meio desta a indicação de algumas hipóteses, para que o professor possa prever possíveis respostas de seus alunos, e com isto possa controlar a realização das atividades, identificando e compreendendo os fatos observados, tendo maiores bases de obter o resultado esperado.

1.1 Jogo Hackenbush

O jogo é composto por peças vermelhas e azuis, que devem estar conectadas a uma linha, e deve ser jogado por dois jogadores, onde cada jogador só pode retirar uma peça da cor que lhe pertence, as peças que perderem contato com essa linha serão apagadas, portanto se um jogador retirar uma peça que está em contato com a linha, apagará automaticamente as peças que estão sobrepostas à mesma. Perderá o jogo o jogador que ficar primeiro sem peças de sua cor para retirar e deve-se sempre procurar fazer uma jogada que diminua as chances do adversário.

A mesma configuração do jogo poderá ser jogada duas ou mais vezes, alternando quem começa a jogar, para que se tenha certeza de que se fez a melhor jogada. Este jogo pertence a uma classe de jogos que admite apenas um único vencedor, que não possui informação escondida, com uma quantidade finita de jogadas e que não possui o fator sorte. Perderá o jogo o jogador que ficar primeiro sem peças de sua cor para retirar. Deve-se sempre procurar fazer uma jogada que diminua as chances do adversário. Pode-se entender melhor este jogo acompanhando a sequência de atividades no item abaixo.

1.1.2 Atividades com o jogo Hackenbush

Nosso principal objetivo, com a sequência de atividades para abordar os números, é a ampliar a concepção do aluno na conceituação de número real, no que se refere a sua definição, representação, à propriedade de densidade e à completude dos números reais, por meio de uma abordagem lúdica, onde os números reais são desvendados durante um determinado tipo de jogo, por meio de uma abordagem única, dos naturais aos irracionais, onde os números podem representar distintas configurações de jogos e vice-versa.

Com base nos pressupostos teóricos adotados por nós, em especial a noção de *complementaridade*, e as considerações de Grando (2000), acreditamos que tal sequência poderá auxiliar os estudantes na compreensão de conceitos como: a definição de número irracional e racional; a infinitude da reta real; a completude dos números reais; a densidade algébrica (a existência de infinitos números reais entre dois números reais quaisquer); a representação decimal ilimitada de um número que pode ser classificada de distintas maneiras; a identificação de padrões encontrando o termo geral de uma sequência numérica, o desenvolvimento o raciocínio lógico e dedutivo, as conjecturas e generalizações; e a transformação da base decimal para a base binária.

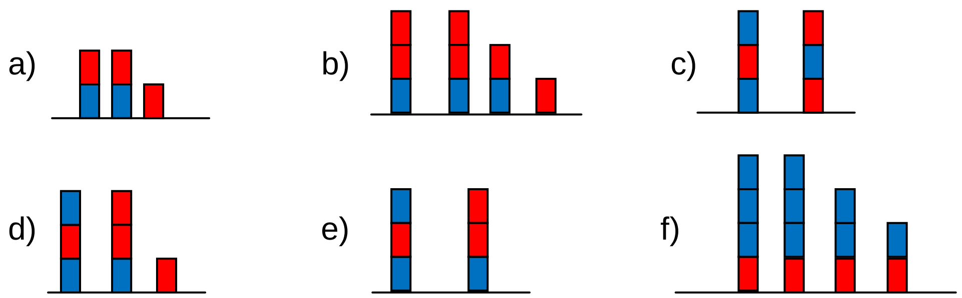
Estimamos que a sequência de atividades aqui apresentada possa ser aplicada ao primeiro ano do Ensino Médio, em aproximadamente 4 aulas de 50 minutos. Em geral, neste nível de ensino abordam-se novamente os números reais, como são indicados em algumas propostas curriculares.

A seguir apresentaremos cada uma das etapas que compõem nossa sequência de atividades. É importante que o professor siga a ordem das etapas, só distribuindo a etapa seguinte após a conclusão das atividades por parte dos estudantes.

1ª Etapa: Familiarização e Conhecendo as regras do jogo Hackenbush

O objetivo desta etapa é o conhecimento das regras e a dinâmica do jogo Hackenbush para que nas etapas seguintes, os jogadores possam identificar padrões e associar números a jogos e vice-versa. O professor entregará as peças e socializará as regras do jogo. Em um primeiro momento o professor montará algumas jogadas para que os alunos tomem contato com as regras do jogo Hackenbush e aprendam a jogá-lo.

Configurações que devem ser jogadas após a explicação do professor:



Análise à priori: É importante que o professor intervenha de modo que os alunos comecem a observar as características abaixo, que serão consolidadas na etapa seguinte:1)os jogos (a) , (b) , (c) e (d) são do tipo "quem começa perde", ele deve se certificar de que todos os alunos alternaram a ordem de começar o jogo e perceberam esta característica; 2)o jogo (e) não interessa quem começa a partida a vantagem sempre é do jogador com peças azuis; 3) o jogo (f) a vantagem é do jogador com peças vermelhas;4) no jogo (e) será necessária novamente a intervenção do professor no sentido de verificar se todos alternaram o jogador que começa o jogo;

O professor deve observar se todos os alunos aprenderam a jogar, pois este é um momento descontraído, apenas para que eles entendam e cumpram as regras do jogo. O professor deve verificar se todos perceberam que a quantidade de peças de uma determinada cor não determina a sua vantagem, que para se chegar a alguma conclusão deve-se analisar cuidadosamente as possibilidades de cada jogador, com o objetivo de encontrar a sua melhor jogada. Se o professor perceber que ainda há dúvidas deve montar mais algumas configurações para que os alunos joguem, para só então passar para a etapa seguinte.

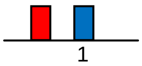
2ª Etapa: Jogar com intervenção

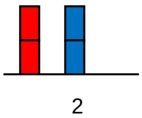
Este é o momento em que o professor fará questionamentos com intuito de amadurecer as ideias plantadas na etapa anterior, analisando as configurações de jogos para decidir se o jogo em questão representa ou não um jogo zero. Solicitando que os alunos registrem suas observações. Alguns questionamentos que podem ser feitos: No caso de não ser um jogo zero, de quem será a vantagem? Das peças azuis? Ou das peças vermelhas? Junto com os alunos o professor deve fazer as seguintes colocações:

Podemos dizer que:1)uma configuração do tipo "quem começa perde" representa um jogo zero; 2) uma configuração onde a vantagem é do jogador com peças vermelhas, independente de quem inicia a partida, representa um número negativo; 3)uma configuração onde a vantagem é do jogador com peças azuis, independente de quem inicia a partida, representa um número positivo. Deve-se então retornar à primeira etapa e jogar novamente os jogos, sendo que agora deve-se fazer o registro indicando se o jogo é zero, positivo ou negativo.

3ª Etapa: Construindo os Números Inteiros Z

Após entender e analisar as configurações positivas, negativas e nulas, os jogadores tentarão, por meio do raciocínio lógico e dedução, efetuar operações algébricas a fim de desvendar um valor numérico para as configurações de cada jogo e, assim, descobrir os números inteiros. Neste momento o professor pode sugerir que, por exemplo, a configuração  represente o número 1. A partir daí montar as configurações de jogo zero para que os alunos descubram os números envolvidos.

a) 

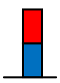
b) 

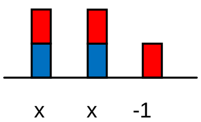
Análise à priori: Com a mediação do professor os alunos devem conseguir montar as equações algébricas envolvidas em cada caso, para que percebam que apenas com as peças conseguimos construir o conjunto dos números inteiros (no item (a) o valor é -1 e no item (b) o valor é -2). O professor deverá propor configurações do jogo para a associação com outros números inteiros como -3, -4 e outros.

4ª Etapa: Construindo os Números Racionais Q

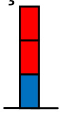
Esta é uma etapa importante pois construiremos com os alunos o conjunto dos números racionais.

1) Vocês já jogaram esta configuração abaixo e viram que é do tipo "quem começa perde", ou seja, trata-se de um jogo zero e como já sabemos que  representa o número -1, como poderíamos encontrar o valor da

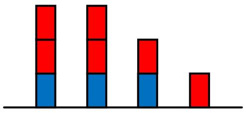
configuração:  ?

Por meio da seguinte configuração: 

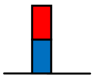
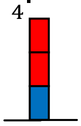
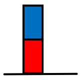
Análise à priori: O professor deve esperar que os alunos cheguem a equação: 2x - 1=0, portanto x= $\frac{1}{2}$.

2) Se colocarmos mais uma peça vermelha em cima da do item anterior teríamos a seguinte configuração:  Qual valor teria?

Como vocês já jogaram essa configuração no item (b) da 1ª etapa, vamos repeti-la para ver se conseguimos descobrir o seu valor:



Análise à priori: O professor deve esperar que os alunos cheguem a equação: $2x + \frac{1}{2} - 1 = 0$, portanto x= $\frac{1}{4}$.

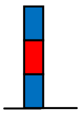
3) Se  representa +1/2 e  representa +1/4, que número é representado pelo jogo  ?

Análise à priori: O professor deve esperar que os alunos cheguem ao valor oposto, ou seja, -1/2.

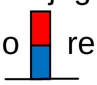
4) Será que existe algum padrão? Se colocarmos mais peças, encontraríamos outros números racionais, mas será que podemos generalizar, ou achar uma fórmula que nos ajude a encontrar outros valores, sem a necessidade de jogar infinitamente?

Análise à priori: O professor deve esperar e incentivar que os alunos deduzam e generalizem a expressão: $\frac{1}{2^n}$, onde n = 0, 1, 2, ..., possibilidades de jogadas (quando a vantagem for do jogador com peças vermelhas, n será a quantidade de peças azuis e vice-versa).

5) Descobrindo mais números racionais Q

I- Vamos agora observar a configuração 

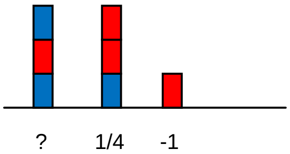
a) Quem tem vantagem nesse jogo ?

Análise à priori: O professor deve esperar que os alunos cheguem a conclusão que: o jogador com peças azuis tem vantagem, portanto é um jogo positivo, como  representa 1/2, e como o jogador com as peças azuis tem mais uma possibilidade de jogada, este número é maior que 1/2 e menor que  =1.

b) Como poderíamos montar um jogo zero para chegar a este valor ? Será que poderíamos utilizar o item (d) da 1ª etapa?

O professor deve esperar para que os alunos deem algumas sugestões para depois resolver a questão.

Solução:



c) Qual a equação podemos montar?

$$x + 1/4 + (-1) = 0, \quad x = 3/4$$

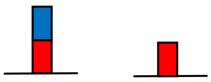
6) Vamos agora comparar algumas configurações.

Coloque o sinal de > (maior que) ou < (menor que), conforme o caso e explique o porquê de sua escolha.

a)

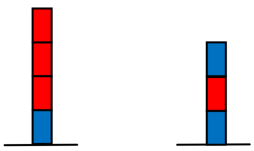
Análise à priori: Espera-se que o aluno coloque o sinal de < (menor), pois o azul leva maior vantagem com a configuração da direita, ou seja, o jogo da esquerda representa o número 1/2 < 1.

b)



Análise à priori: Espera-se que o aluno coloque o sinal de >(maior), pois o vermelho leva maior vantagem com a configuração da esquerda, ou seja, o jogo da esquerda representa o número -1/2 > -1.

c)

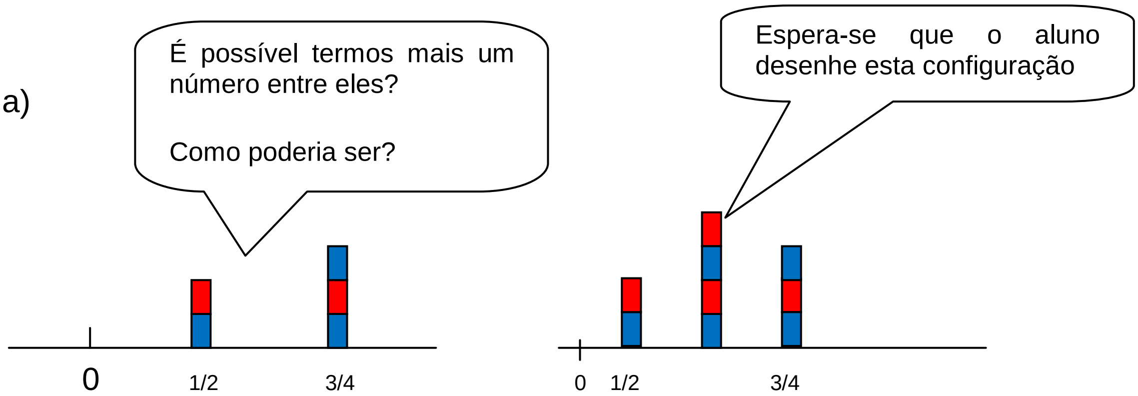


Análise à priori: Espera-se que o aluno coloque o sinal de <(menor), pois o azul leva maior vantagem com a configuração da direita, ou seja, o jogo da esquerda representa o número 1/8 < 3/4.

7) Vamos agora fazer algumas observações sobre as configurações dos jogos na reta real:

O professor deve distribuir cada item deste tópico separadamente e na ordem que se encontram e, só distribuir o item seguinte após os estudantes completarem as configurações na reta real.

a)



O professor deve continuar questionando se é possível acrescentar mais uma configuração, para que os alunos possam concluir que podemos ter infinitos números entre dois números dados.

5ª Etapa: Construindo os Números Irracionais e Racionais na forma decimal

O matemático Elwin Berlekamp propôs uma regra para estabelecer uma correspondência entre os números reais positivos e as configurações do Hackenbush. O primeiro par de peças de cores distintas que aparecem contando de baixo para cima representará a vírgula binária; as peças vermelhas e brancas que seguem este par são os dígitos 1 e 0, respectivamente, que aparecem à direita da vírgula, sendo ainda adicionado um último 1 no caso em que a configuração for finita. A parte inteira é igual ao número de peças que aparecem antes do par que representa a vírgula. As configurações de Hackenbush podem ser infinitas

Relembraremos ou mostraremos (pois muitos podem não ter tido contato com a conversão entre bases), como transformar números na base decimal para a base binária, pois precisaremos utilizar tal conceito para a representação dos números irracionais e os racionais também.

1) Vamos pensar! 0,333333333.... é um número racional ou irracional?

Análise à priori: Espera-se que o aluno diga que 0,33333.... = 1/3, portanto um número racional com representação decimal infinita.

a) Vejamos um algoritmo para converter um número na forma decimal para a base binária: E utilizando Hackenbush, vamos representar conforme abaixo:

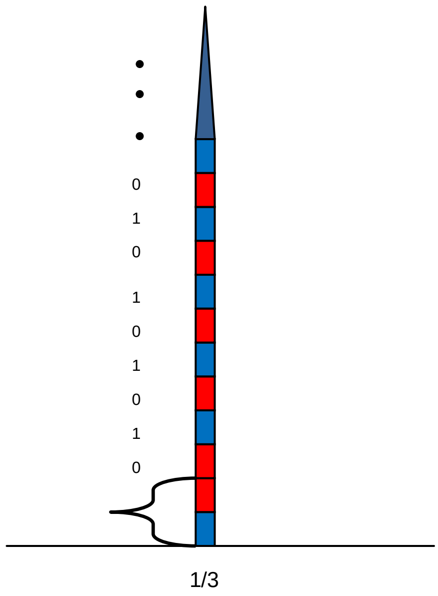
0,3333... x 2 = 0,6666...

0,6666... x 2 = 1,3333...

0,3333... x 2 = 0,6666...

0,6666... x 2 = 1,3333...

0,3333... x 2 = 0,6666...



O professor deve perguntar aos alunos: E agora este é um número racional ou irracional? Temos uma dízima periódica? Esperar que todos reflitam e perguntar: Vocês percebem que a classificação de um número como racional/irracional independe da base?

2) Agora vamos observar um número irracional $\frac{\sqrt{3}}{5} \cong \mathbf{0,3464101615}$...

Utilizando o algoritmo para converte da base decimal para a base binária:

0,346... x 2 = **0**,6928...

0,6928... x 2 = **1**,3856...

0,3856... x 2 = **0**,7712...

0,7712... x 2 = **1**,5425...

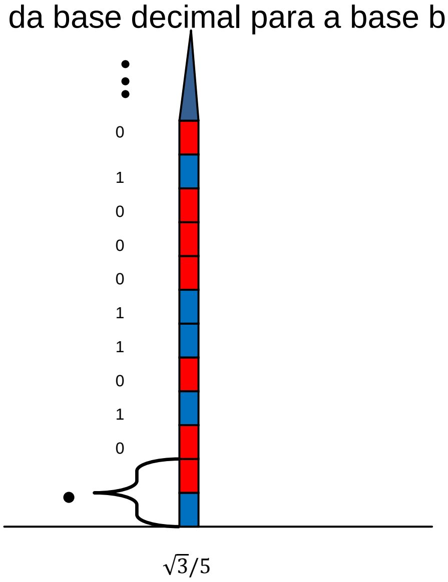
0,5425... x 2 = **1**,08512...

0,08512... x 2 = **0**,17025...

0,17025... x 2 = **0**,34050...

0,34050... x 2 = **0**,6810...

0,6810... x 2 = **1**,3620...

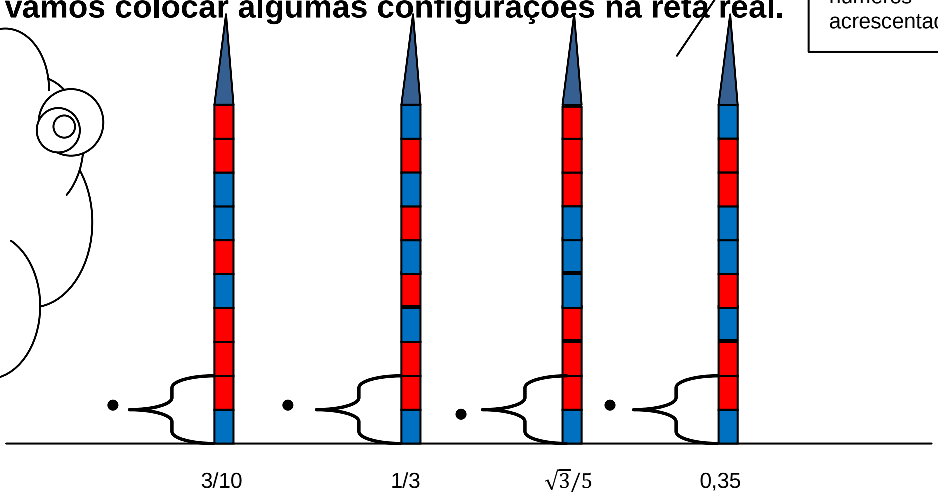


O professor deve perguntar aos alunos: E agora este é um número racional ou irracional? Temos uma dízima periódica?

É possível termos mais um número entre eles? Quantos números poderiam ser acrescentados?

Agora vamos colocar algumas configurações na reta real.

O professor deve fazer com que todos percebam que a configuração dos números racionais é sempre representada por "partes" periódicas infinitas, enquanto que nos irracionais isto não existe.



Agora vamos observar o número 0,9999999...

O professor deve perguntar aos alunos, depois do que vimos, o que vocês acham deste número, é racional ou irracional?

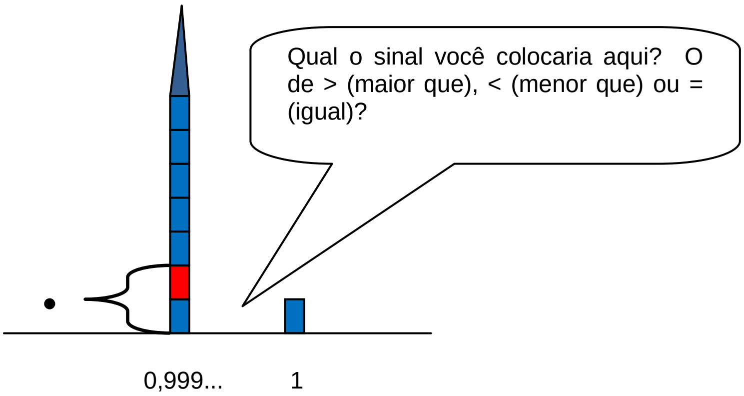
Utilizando o algoritmo para converte da base decimal para a base binária:

0,9999... x 2 = 1,9999....

0,9999... x 2 = 1,9999...

0,9999... x 2 = 1,9999...

0,9999... x 2 = 1,9999...



O professor deve deixar que os alunos cheguem a conclusão que não podemos escrever nenhuma outra configuração entre eles.

Depois deve questionar: "O que isso significa?" Já vimos antes que podemos ir acrescentando infinitos números entre as configurações...

O professor deve deixar que os alunos cheguem a conclusão de que 0,99999.... é igual a 1.

Conclusões

Com base em tudo que estudamos a respeito de números reais (Cortes de Dedekind, classes de equivalência de sequências convergentes de Cauchy de números racionais, etc); e levando em consideração as dificuldades encontradas pelos alunos em compreender este conceito, conseguimos com ajuda do professor orientador por meio de esclarecimentos, sugestões, ideias, realizar uma transposição didática da Teoria de Conway com o desenvolvimento de uma sequência de atividades para abordagem do conceito número real no Ensino Médio.

Acreditamos que essa pesquisa forneça mais uma alternativa de ferramenta didática, pois propõe uma nova maneira do professor abordar um tema tão importante e complexo, quanto o número real. Além disso, esperamos que esta sequência leve o professor a uma reflexão sobre as formas de abordar a conceituação de número real.

É importante destacar que a organização da sequência de atividades teve como base as leituras de artigos e referenciais teóricos, ou seja, a sequência foi organizada a partir de considerações teóricas, não fizemos um estudo empírico com estudantes do Ensino Médio para verificar a adequação das atividades, sendo assim, será fundamental o desenvolvimento de outras pesquisas que complementem essa, em especial, a aplicação das atividades com um grupo de alunos antes da utilização das atividades nas aulas de matemática.

Bibliografia

ÁVILA, G. Análise Matemática para licenciatura. São Paulo: EDGARD BLUCHER, 2011.

FONSECA, Rogério Ferreira da. Número: o conceito a partir de jogos.Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 2005. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/rogerio_ferreira_fonseca.pdf

FONSECA, Rogério Ferreira da. A complementaridade entre os aspectos intensional e extensional na conceituação de número real proposta por John Horton Conway. Tese de Doutorado, 2010, PUC/SP. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/rogerio_ferreira_fonseca.pdf

GRANDO, R.C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos em sala de aula**. Tese de Doutorado, 2000, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP-SP. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/tese_grando.pdf

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo; FONSECA, Rogério Ferreira da. O conceito matemático de número real como objeto de ensino. In: ANAIS DO IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – IV SIPEM. Taguatinga, DF, 2009.

LIMA, E. L. *Curso de Análise - volume 1- Projeto Euclides.*Rio de Janeiro:IMPA, 2009.

MOREIRA, P. C., DAVID, M. M. M. S. Formação matemática do professor- Licenciatura e prática docente escolar. São Paulo:AUTÊNTICA,2012.p.47-99.