RICARDO DEZSO SABO

ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO DOS CONTEÚDOS REFERENTES À COMBINATÓRIA

Monografia apresentada como exigência parcial para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática ao Centro de Pós-Graduação, Pesquisa e Extensão do Centro Universitário Fundação Santo André.

Orientadora:
Prof. Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho.

SANTO ANDRÉ
2007

Candidato: Ricardo Dezso Sabo

Título: Análise de Livros Didáticos do Ensino Médio: um Estudo dos Conteúdos Referentes à Análise Combinatória.

Trabalho apresentado como exigência parcial para a obtenção do grau de Especialista, ao Centro de Pós-graduação, Pesquisa e Extensão do Centro Universitário Fundação Santo André, Curso de Educação Matemática.

Data: _____/_____/______

____ ____________________________

Instituição: (assinatura)

Nota: ______________________________

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha esposa Vera, com muito amor, pela paciência, compreensão e incentivo.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me oferecer a vida e o dom de aprender e educar.

A Professora Doutora Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, pela orientação, competência e ajuda para me apontar as diretrizes do caminho a ser percorrido.

A Professora Doutora. Maria Inez Rodrigues Miguel pelas inúmeras sugestões para a elaboração da monografia.

Ao Professor Doutor. Saddo Ag Almouloud pelo valioso aprendizado prestado durante todo o curso.

Ao Centro de Pós-Graduação, Pesquisa e Extensão do Centro Universitário Fundação Santo André, pela qual tive a oportunidade de cursar e concluir esta especialização.

Aos colegas do curso que proporcionaram vários momentos de compreensão e ajuda durante os trabalhos apresentados ao longo do curso.

Em especial, a minha esposa Vera, pela compreensão quanto às ausências e falhas como marido e, sobretudo, por haver sempre participado e me apoiado em todos os momentos do trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de investigar a organização dos livros didáticos do Ensino Médio referentes ao tema Análise Combinatória objetivando fazer uma análise matemática dos conceitos envolvidos. Como o livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado (PCNEM, 2006), analisamos três coleções de livros didáticos segundo a Teoria Antropológica do Didático – TAD (Chevallard, 1991), no qual buscamos identificar as tarefas, técnicas e o discurso teórico-tecnológico. Os resultados que identificamos com essa análise indicam que os autores dos livros didáticos analisados, salientam a aplicação da fórmula algébrica em exercícios que possuem, na sua grande maioria, tarefas e técnicas muito repetitivas e semelhantes.

Palavras Chave: Livro Didático, Organização Praxeológica, Análise Combinatória.

ABSTRACT

This work has the objective to investigate the organization of referring textbooks of Middle-school to the subject Combinatory Analysis being objectified to make a mathematical analysis of the involved concepts. As the textbook to taking office, a long time ago, the paper of only reference on knowing to be taught (PCNEM, 2006), we analyze three textbooks collections according to Anthropology Theory of Didactic - TAD (Chevallard, 1991), which involves identifying the tasks, the techniques and the theoretician-technological discourse. The results of the research indicate that the authors of analyzed textbooks, point out the application of the algebraic formula in exercises, in its great majority, repetitive exercises and very similar in relation to tasks and techniques.

Keywords: Textbooks, Praxeological Organization, Combinatory Analysis.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Desde 1988, quando ainda era estudante do segundo ano do curso de licenciatura, no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, trabalho como professor nas escolas públicas da cidade de São Paulo.

Nos últimos quinze anos, lecionando no Ensino Médio, observo que muitos professores de matemática, por diversas razões, evitam, ou até não abordam, de forma consistente, o tema: Análise Combinatória. Muitos alegam ser difícil ensinar, outros, que os alunos não têm capacidade de aprender algo tão sofisticado, alguns afirmam que o tempo (ano letivo) é insuficiente e então se torna necessário optar por alguns temas que julgam mais importantes.

Algumas vezes, observo professores afirmando que eles próprios não têm esses conceitos construídos de forma sólida e com significado, e por esse motivo evitam abordar o tema ou, apenas, apresentam aos alunos, um processo de aplicação de fórmulas prontas, sem justificativas ou explicações. Deste modo, o aluno utiliza-se da memorização para aplicar “a fórmula certa” na resolução de problemas específicos, ou seja, o ensino de análise combinatória torna-se um ato tecnicista e operacional.

Neste contexto, o aluno tem a necessidade de “adivinhar” a fórmula pertinente para encontrar a resposta que o professor deseja. Não há, assim, a construção dos conceitos de contagem com atribuição de significados e, muito menos, o desenvolvimento de um raciocínio combinatório.

Um dos fatores que pode contribuir e favorecer que os professores não abordarem determinados conceitos matemáticos é a segmentação do conhecimento matemático. Cada conceito é tratado de forma pontual em uma determinada série do Ensino Médio, desta forma, não há interação entre os conhecimentos ensinados.

A grande maioria dos livros didáticos do Ensino Médio, que já tive oportunidade de trabalhar e estudar segue este padrão de “encaixotamento” dos conceitos matemáticos. Observei, durante os anos de magistério, muitos professores, que não desejam abordar os conceitos de contagem, optam em “pular” o capítulo do livro didático, ou, às vezes, optam em não lecionar na 2ª série do

Ensino Médio, ano em que os livros didáticos “encapsulam” os conceitos relativos a esse tema.

Assim, analisar como esses livros didáticos abordam os conceitos de contagem pode ser um fator importante no estudo das concepções dos professores sobre a abordagem dos conceitos de Análise Combinatória em sala de aula.

Desta forma, analisar como esses conhecimentos são estruturados e desenvolvidos nos livros didáticos, torna-se um elemento essencial e determinante para entender como se dá a construção da prática docente e dos conceitos de análise combinatória na sala de aula.

Por fim, associando as minhas inquietações sobre o “ensinar Análise Combinatória”, os problemas que permeiam todo esse tema e minhas observações sobre as posturas de muitos professores decidi contribuir, um pouco, no desenvolvimento das pesquisas em Educação Matemática investigando este tema.

QUADRO TEÓRICO

Este trabalho tem a proposta de analisar livros didáticos embasado pela Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Chevallard em 1992. Utilizando-se desta teoria identificaremos, na esfera dos livros didáticos selecionados, os tipos de Tarefas, Técnicas, Tecnologias e Teorias que permeiam a construção dos conceitos matemáticos de análise combinatória. Vale ressaltar que, esta análise se restringirá apenas a alguns livros didáticos utilizados por professores do 2º ano do Ensino Médio da rede pública do Estado de São Paulo.

A utilização da Teoria Antropológica do Didático (TAD), como âmago teórico deste trabalho, justifica-se por proporcionar um procedimento de análise dos livros didáticos acerca dos aspectos dos conhecimentos matemáticos e didáticos. Salientamos que este trabalho se restringirá, apenas, a analisar como se estabelece a organização matemática nestes livros didáticos.

Esta Teoria é uma importante contribuição para a Didática Matemática, pois fornece condições e subsídios teóricos para analisar como os conhecimentos matemáticos estão relacionados e como essas relações podem objetivar, efetivamente, a transposição didática dos conceitos matemáticos envolvidos. Segundo Chevallard, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) estuda o homem frente ao saber matemático, e mais especificamente, frente a situações matemáticas. Miguel exalta:

> ...o uso da Teoria Antropológica do Didático por possibilitar a organização do estudo em dois aspectos conectados, didático e matemático, além de permitir, em cada caso, que as atividades propostas pelos autores dos livros didáticos analisados e a concepção da seqüência de ensino pretendida pudessem ser descritas sob o ponto de vista prático e do saber matemático envolvido. (MIGUEL, 2005, p.31).

O postulado básico da Teoria Antropológica do Didático (TAD) é admitir que qualquer atividade humana possa ser descrita por um modelo único, que se resume pela palavra *praxeologia* (do grego: *prâksis,eós* 'ação, o fato de agir'; e do grego: *logía* indicativo de 'ciência). [1]

---

[1] Dicionário Eletrônico Houaiss da Língua Portuguesa.

O ato de ensinar e aprender é o resultado de atividades humanas, então pode ser descrito por uma organização praxeológica. Tomando como primícias o fato que o livro didático, no ambiente escolar, faz parte do processo de aprender e ensinar, então, é admissível elaborar uma análise praxeológica destes livros. Novamente, destacamos que o objetivo desta análise será em descrever como os conhecimentos matemáticos relacionados ao objeto de estudo Análise Combinatória estão inseridos e relacionados nas obras analisadas.

Segundo Almouloud (2000), uma Organização Praxeológica é formada por um conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas para um tipo de tarefas.

A noção de tarefa está intimamente relacionada a um objetivo relativamente preciso, e deve ser expressa por meio de um *verbo*. Por exemplo, *calcular* o número de anagramas da palavra PUC é uma tarefa, mas *Calcular*, apenas, nomeia-se como gênero de tarefas.

Assim, podemos conjecturar que, os gêneros de tarefas realizadas pelos alunos na escola, no decorrer dos anos letivos, vão se enriquecendo. Por exemplo, para um aluno da 5ª série do Ensino Fundamental, o gênero de tarefa *Calcular* pode expressar, apenas, o ato (tarefa) de efetuar uma expressão aritmética. Por outro lado, observando um aluno do Ensino Médio, o gênero de tarefa *Calcular* pode expressar vários tipos de tarefas, por exemplo, efetuar uma expressão aritmética, determinar o número de anagramas de uma palavra dada, indicar o volume de um sólido, etc. Assim sendo, os gêneros de tarefas se enriquecem e aprimoram-se na sucessão dos anos letivos.

Segundo Chevallard:

> Tarefas, tipos de tarefas e gênero de tarefas não são dados da natureza, mas "artefatos", "obras", nas quais a reconstrução em tal instituição, e, por exemplo, em tal classe, é um problema completo, e é o objetivo específico da didática. (CHEVALLARD, 1999, p.3). [2]

Uma praxeologia relativa a uma tarefa ou a um gênero de tarefas determina, também, uma maneira ou caminho de como realizá-las, esta "maneira de fazer" uma

---

[2] Tradução Nossa. Observação: todas as traduções inseridas neste trabalho são livres e feitas pelo autor.

determinada tarefa é chamada de técnica (do grego. *tekhnikós,ê,ón* 'relativo à arte, à ciência ou ao saber, ao conhecimento ou à prática de uma profissão).[3]

Em princípio, uma praxeologia relativa a algum tipo de tarefa contém uma determinada técnica, e essa combinação [tarefa-técnica] é denominada de bloco *"saber fazer".*

Vale salientar que uma determinada técnica relativa a uma específica tarefa nem sempre vale para todo o gênero de tarefas associado a essa técnica. Por exemplo, algumas técnicas que são válidas para operacionalizar cálculos aritméticos no conjunto dos Números Naturais não são adequadas para o trabalho no conjunto dos Números Inteiros. Então, podemos observar que a técnica está intrínseca ao bloco prático-técnico, ou seja, intimamente ligada à tarefa a ser realizada.

Nota-se que, em uma determinada instituição existe um número restrito de técnicas que são institucionalmente reconhecidas. Contudo, essas mesmas técnicas podem não o ser em outra instituição.

Tomemos como exemplo a resolução da equação do 2º grau. Analisando, no Brasil, a prática docente descrita por algumas pesquisas acadêmicas e, também, os livros didáticos utilizados na 8ª série do Ensino Fundamental observamos a valorização da técnica do uso da fórmula de Bhāskara na resolução de equações completas do 2º grau.

Por outro lado, se observarmos os livros didáticos de outros países, por exemplo, a França, e também, a prática docente neste país, notamos que a técnica da utilização da fórmula de Bhāskara não é evidenciada e condicionada como única maneira possível para determinar as soluções de uma equação completa do 2º grau.

Assim, dependendo da instituição – neste caso deve ficar claro que instituição não está se referindo apenas a países com cultural diferentes, mas também, a diferentes colégios, ou, até, diferentes salas de aulas, no mesmo colégio – as técnicas podem ser reconhecidas como um "caminho" para a resolução de uma determinada tarefa, ou não.

---

[3] Dicionário Eletrônico Houaiss da Língua Portuguesa.

Para Chevallard, Bosch e Gascón (1997, p. 125), para que uma técnica possa ser utilizada de maneira normalizada, deve aparecer como algo ao mesmo tempo correto, compreensível e justificado. A existência de uma técnica supõe, também, a existência subjacente de um discurso interpretativo e justificativo da técnica e de âmbito de aplicabilidade e validade. Chamaremos a esse discurso sobre a técnica de uma tecnologia.

Desta forma, a tecnologia é um discurso racional com o objetivo de justificar e demonstrar as técnicas utilizadas para uma determinada tarefa ou gênero de tarefas. O discurso racional utilizado varia no espaço institucional, deste modo, um discurso que possui uma racionalidade para uma determinada instituição poderá parecer pouco racional em outro espaço institucional.

Vale observar que em uma instituição, qualquer que seja o tipo de tarefa, a técnica relativa a esta tarefa está sempre associada a uma tecnologia, ou a um vestígio de tecnologia. Como a tecnologia tem a função de explicar, justificar e demonstrar as técnicas utilizadas, o componente tecnológico se modifica de acordo com os tipos de tarefas e técnicas utilizadas.

Para exemplificar uma tecnologia, vamos utilizar como exemplo, novamente, a resolução da equação do 2º grau pela da fórmula de Bhāskara. Neste caso, a demonstração da fórmula é a tecnologia utilizada, ou seja, existe um discurso tecnológico que valida o uso desta fórmula na resolução de todas as equações do 2º grau. Então, podemos afirmar que, a demonstração da fórmula do descriminante (fórmula de Bhāskara) é a justificativa do uso desta tecnologia nesta tarefa.

Outra função da tecnologia a se considerar é a ação de explicar, esclarecer e tornar inteligível as técnicas, isto é, expor por que a técnica escolhida tem êxito na forma como é desenvolvida.

Em uma organização matemática observa-se, freqüentemente, esta ação de explicar e tornar inteligível uma determinada tecnologia quando se utilizam processos demonstrativos. Por exemplo, na geometria euclidiana, utilizando a definição de ângulos suplementares demonstra-se que os ângulos opostos pelo vértice possuem a mesma medida, neste caso, a demonstração do teorema é a tecnologia que esclarece a técnica, ou seja, que explica o teorema.

A existência de uma tecnologia é uma condição necessária para a existência de uma técnica, assim sendo, a tecnologia tem, também, a função de produzir técnicas. Note que, sempre haverá tecnologias potenciais, denominadas, tecnologias sub-exploradas, aguardando técnicas para justificar e explicar uma determinada produção.

Toda tecnologia, por sua vez, precisa de uma justificativa, que se denomina Teoria da Técnica, pois, o discurso tecnológico contém afirmações mais ou menos explícitas, deste modo, há a necessidade de descrever essa tecnologia com precisão e rigor, permitindo efetivamente uma formalização. Passa-se, assim, a um nível superior de justificação – explicação – produção, o nível da Teoria.

Chevallard argumenta que:

> Em grego, *theôria* tem tomado a partir de Platão o sentido moderno de "especulação abstrata". Porém, na origem, significa simplesmente a idéia de contemplação de um espetáculo – os *theôros* eram os espectadores que olhavam a ação sem participar. Disso, os enunciados teóricos aparecem frequentemente como "abstratos", afastados das preocupações dos "simples" tecnólogos e técnicos. Este efeito de abstração é relativo ao que se baseia a grande generalidade dos enunciados teóricos – sua capacidade para justificar, para explicar, para produzir. (CHEVALLARD, 1999, p.5)

Assim, toda obra matemática é constituída como solução a algum tipo de tarefa problemática, emanando técnicas que permitem resolver esses problemas, tecnologias que justificam, através de um discurso racional, essas técnicas, e as teorias que fundamentam todo este processo tecnológico.

Segundo Chevallard, Bosch e Gascón,

> Uma *obra matemática* surge sempre como resposta para uma questão ou para um conjunto de questões. Mas em que se materializa tal resposta? Em uma primeira aproximação, poderíamos dizer que a resposta matemática para uma questão se cristaliza em um conjunto organizado de objetos ligados entre si por diversas inter-relações, isto é, em uma *organização matemática*. Essa organização é o resultado final de uma atividade matemática que, como toda atividade humana, apresenta dois aspectos inseparáveis: a prática matemática ou "práxis", que consta de *tarefas e técnicas*, e o discurso fundamentado ou "logos" sobre essa prática, que é constituída por tecnologias e teorias. (CHEVALLARD, BOSCH E GASCÓN 1997, p. 275).

Desta forma, nota-se, em princípio que, em torno de uma determinada tarefa, encontramos um tripé formado por uma técnica, uma tecnologia e uma teoria. Então, podemos observar uma organização praxeológica como uma organização matemática constituída por dois blocos: o bloco [prático – técnico] que constitui o saber fazer e o bloco [tecnológico – teórico] que constitui o saber.

Não é possível para o matemático, o professor de matemática ou mesmo o aluno atuar matematicamente sem compreender o que está fazendo, por outro lado não é possível entender uma organização matemática sem uma prática matemática eficaz. Então, não há práxis sem logos, como também, não há logos sem práxis.

Desta forma, a noção de praxeologia é a união destas duas facetas da atividade matemática, ou seja, o fazer matemática, o bloco [prático – técnico] e o compreender matemática, o bloco [tecnológico – teórico].

Outro ponto a se observar é o fato que constantemente, em uma instituição, aparecem novas tarefas problemáticas e consequentemente o surgimento de novas praxeologias que serão consideradas relevantes e necessárias por alguns membros da instituição naquele determinado momento. Então, pode-se considerar que as praxeologia são temporais, ou seja, em uma determinada época de uma instituição algumas técnicas se sobressaem e são relevantes. Porém, se analisarmos essas mesmas técnicas em outro período de tempo, essas poderão estar ultrapassadas e sem relevância.

Para exemplificar isso vamos fazer uma breve análise da participação histórica da Teoria dos Conjuntos no ensino da matemática no Brasil. Na década de 60 e 70, do século passado, esta teoria fazia parte, fortemente, da grade curricular do ensino da matemática, em detrimento, do aprendizado da geometria. Por outro lado, observamos, hoje em dia, uma valorização do ensino da geometria, desde as primeiras séries do Ensino Fundamental e pouca, ou nenhuma, utilização da Teoria dos Conjuntos na escola básica.

Assim, a utilização da Teoria dos Conjuntos, na história recente do ensino de matemática no Brasil, mostra, claramente, como uma praxeologia pode ser considerada temporal, ou seja, em uma determinada época essa praxeologia mostrou-se usual e relevante, sendo que hoje em dia, é considerada ultrapassada e sem relevância.

O fato das praxeologias serem temporais é uma conseqüência direta do fato das praxeologias serem um produto das tarefas rotineiras das atividades humanas. Neste universo de tarefas rotineiras, surgem, a todo o momento tarefas problemáticas, ou seja, tarefas que não possuem uma técnica, ou um gênero de técnica apropriado. Nesta situação, torna-se necessário o desenvolvimento de uma nova organização praxeologias para que essas tarefas sejam analisadas, resolvidas e justificadas.

O fato fundamental que principia o processo do desenvolvimento de novas praxeologias e a falta de técnicas para realizar determinadas tarefas, e isto, implica no surgimento de questões do tipo: Como realizar uma determinada tarefa?, ou Como realizar melhor essas tarefas? As respostas a esses tipos de questões não será uma simples informação, ou apenas dados relativos a essas situações problemáticas, e sim, será a geratriz para o surgimento embrionário de uma nova organização praxeologia que está por construir.

"A noção de praxeologia aparece como uma noção genérica cujo estudo é conveniente que seja aprofundado, sobretudo, mediante o estudo empírico e as análises dos dados de observações recolhidos." (Chevallard, 1999, p.7).

Estudar uma problemática é determinar uma tarefa, ou um gênero de tarefas que conduzem a elaboração de uma organização praxeológica. "Porém, em um mundo ordinário da *skholê*, estudar uma questão é quase sempre recriar para si mesmo e seus companheiros de estudo, uma organização praxeológica já produzida em qualquer outra instituição" (Chevallard, 1999) Os gregos denominavam a escola de *Skholê*, "...isso não é um mero parênteses no qual nos fecham durante a infância e a adolescência. É toda uma dimensão de nossa vida" (Chevallard, Bosch e Gascón, 1997, p. 300). Deste modo, estudar uma obra, é então, estudar uma resposta, ou seja, estudar uma obra já existente analisá-la, reformulá-la e transportá-la ao habitat de estudo.

O processo de estudar, analisar, reformular e transportar uma obra ao habitat de estudo, que poderá ser a sala de aula ou qualquer outro ambiente de estudo é o papel do professor.

Nesta situação, é necessário e imprescindível que o professor aproprie-se do conhecimento matemático das obras analisadas e, também, observe estas obras como uma organização praxeológica na qual o desenvolvimento do conhecimento matemático está permeado pelos blocos [prático – técnico], o fazer matemática e o bloco [tecnológico – teórico], o compreender matemática. Por outro lado, vale observar que para elaborar uma praxeologia matemática, é necessário também construir uma praxeologia didática.

Segundo Chevallard, Bosch e Gascón,

> ...a fronteira entre o didático e o matemático não está estabelecida de maneira definida. Não podem ser separados facilmente. “Fazer Matemática”, na linguagem corrente, quer dizer ao mesmo tempo, operar, atuar, de acordo com certa praxeologia matemática – como quando resolvo uma equação do segundo grau – e também quer dizer produzir uma praxeologia matemática nova ou parcialmente nova. A dificuldade da qual estou falando aparece muito claramente nesta dupla vertente do verbo fazer: fazer no sentido de produzir e fazer no sentido de agir. (CHEVALLARD, BOSCH E GASCÓN, 1997, p. 254).

Assim sendo, ao analisar e estudar uma obra matemática se está, simultaneamente, analisando a organização matemática na qual a obra está embasada, mas também, está observando técnicas didáticas que organizam estas obras matemáticas. Neste caso, entende-se por didático o que é relativo ao estudo da matemática, desta forma, a fronteira entre o matemático e o didático é muito imprecisa.

Para finalizar, as organizações matemáticas e didáticas permeiam toda a prática docente do professor. Então, analisando os conceitos da Transposição Didática e as Organizações Praxeológicas, e criando um “link” com o processo da construção do conhecimento, podemos conjecturar que o professor, no momento em que analisa sua prática docente, não poderá esquecer de observar como esses conceitos estão inseridos no seu “fazer entender e aprender” matemática.

Vale ressaltar, novamente, que este trabalho se restringirá, apenas, a analisar como se estabelece uma organização matemática nos livros didáticos. Por outro lado, não poderemos esquecer que para analisar uma organização matemática também devemos observar alguns pontos da organização didática.

ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Utilizando a Teoria Antropológica do Didático (TAD), de Chevallard (1992), como suporte teórico, apresentaremos uma análise de três livros didáticos usualmente utilizados no Ensino Médio em escolas públicas do Estado de São Paulo. Temos como objetivo central enfocar apenas as análises matemáticas sobre os conceitos de Análise Combinatória.

Os professores das escolas públicas escolhem os livros didáticos que serão utilizados nos próximos três anos letivos a partir da lista dos livros didáticos contida no Catálogo do Programa Nacional do Livro do Ensino Médio (PNLEM/2006). Por essa razão, selecionamos, desta lista, os livros que serão analisados neste trabalho.

Sobre o livro didático, o PNLEM (2006) enfatiza como orientações curriculares para o Ensino Médio:

> Na ausência de orientações curriculares mais consolidadas, sistematizadas e acessíveis a todos os professores, o livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, gerando, muitas vezes, a concepção de que “o mais importante no ensino da matemática na escola é trabalhar o livro de capa a capa”. Nesse processo, o professor termina perdendo sua autonomia como responsável pelo processo de transposição didática interna. É importante, pois, que o livro didático de Matemática seja visto não como um substituto de orientações curriculares, mas como um recurso a mais. (PNLEM, 2006, p. 86).

Observando o livro didático como instrumento fundamental de referência sobre o saber a ser ensinado e, também, como delineador dos conteúdos, conceitos e processos que envolvem, efetivamente, a prática docente, torna-se, desta forma, pertinente, efetuar uma analise de como esses conceitos estão estruturados e relacionados.

Ainda, a respeito do livro didático, Lopes (2000), em sua tese de doutorado afirma:

> Ele sempre representou – e continua representando – para o professor, o complemento de sua formação acadêmica e o apoio na prática escolar, principalmente pelas condições de trabalho, não tão favoráveis, que o professor enfrenta. (Lopes, 2000, p. 224).

Assim sendo, podemos afirmar que o livro didático é um fator determinante na elaboração dos conceitos de contagem pelos professores nas aulas de matemática. Desta forma, analisar como esses conhecimentos são estruturados e desenvolvidos nos livros didáticos, torna-se um elemento essencial e determinante para entender como se dá a construção dos conceitos de análise combinatória na 2ª série do Ensino Médio.

Diante deste cenário, objetivamos utilizar a Teoria Antropológica do Didático (TAD) para analisar, cientificamente, como os conteúdos matemáticos relativos aos conceitos de contagem são apresentados no livro didático, como também analisar as propostas dos autores com relação aos exercícios inseridos nesses livros.

Novamente, salientamos que pretendemos apenas elaborar uma análise matemática com relação aos conceitos de contagem e, também, dos exercícios propostos pelos autores.

O livros que serão analisados neste trabalho serão:

LIVRO 1: ***Matemática Contexto & Aplicação.***

Luiz Roberto Dante

Editora Ática – São Paulo (2004)

LIVRO 2: ***Matemática.***

Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz

Editora Saraiva – São Paulo (2005)

LIVRO 3: ***Matemática Ciência e Aplicação.***

Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e outros

Editora Atual – São Paulo (2004)

Vale salientar que não pretendemos fazer um juízo de valor ou uma avaliação no sentido de enaltecer, depreciar ou aviltar as obras aqui apresentadas, o objetivo deste trabalho é analisá-las e discutí-las sob um olhar crítico-científico, alicerçado e permeado pela Teoria Antropológica do Didático (TAD).

Nosso primeiro passo, nesta análise, será em definir praxeologicamente as tarefas sugeridas pelos autores nos livros didáticos e, em seguida, investigar as técnicas, tecnologias e teorias que envolvem essas tarefas propostas. Novamente salientamos que as análises aqui apresentadas se restringirão, apenas, na organização matemática dos conteúdos abordados. Não esquecendo, contudo, que a organização matemática está simbioticamente atrelada à organização didática, mas está não será analisada.

A grande maioria dos livros didáticos do Ensino Médio segue o padrão de “encaixotamento” dos conceitos matemáticos, ou seja, cada conceito matemático é abordado pontualmente em uma determinada série, desta forma, não há uma interação entre os conhecimentos matemáticos ensinados.

Observamos que nos três livros didáticos escolhidos, como na maioria dos livros didáticos destinados ao Ensino Médio, os conceitos de contagem estão “encapsulados” nos livros destinados aos alunos do 2º ano. Por essa razão, nossa atenção ficará voltada, apenas, a analisar, unicamente, os livros do 2º ano, apesar de olharmos todos os volumes das coleções buscando eventuais atividades de articulação entre campos da Matemática que envolvam a Combinatória.

Os PNLEM (2006) – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, enfatiza que:

> A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas – o professor precisa antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de “ilustrar” o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola. (PCNEM, 2006, p. 83).

Baseado no que os PNLEM propõem, observamos que os autores dos três livros didáticos iniciam o estudo de Análise Combinatória utilizando de alguns problemas resolvidos e contextualizados com o objetivo de induzir o conceito do Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Princípio Fundamental da Contagem – PFC

Fundamentando-se no que os PCN+ propõem, observamos que os autores dos livros analisados introduzem o estudo de contagem a partir de problemas-exemplos resolvidos e contextualizados, sendo que, essa seqüência de exemplos é utilizada como suporte para induzir o aluno a conceituar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

No *livro 1* e no *livro 3*, os autores enunciam o PFC para eventos compostos de duas etapas sucessivas e independentes, mas no *livro 2* observamos que as autoras optaram em enunciar o PFC para três etapas sucessivas e independentes.

Nesta situação, podemos afirmar que há uma conceitualização matemática errônea ou "não elegante", enunciada pelas autoras. Seria mais natural e requintado enunciar o PFC, apenas, para duas etapas sucessivas e independentes (como feito pelos autores dos *livros 1* e *2*).

Para demonstrar que o PFC vale para mais que duas etapas sucessivas e independentes será necessário utilizar-se do Princípio da Indução Finita (PIF).

Após enunciarem o PFC, os autores sugerem a resolução de uma seqüência de exercícios. Analisaremos praxeologicamente alguns ***modelos padrões*** de exercícios apresentados pelos autores.

Livro 1: Analisando a seqüência de exercício apresentada pelo autor, observamos um modelo único de exercícios.

Exemplo do Modelo1: Numa lanchonete há 5 tipos de sanduíche, 4 tipos de refrigerante e 3 tipos de sorvete. De quantas maneiras podemos tomar um lanche composto por 1 sanduíche, 1 refrigerante e 1 sorvete?

Tarefa: determinar quantas refeições é possível montar com 1 sanduíche, 1 refrigerante e 1 sorvete, ou seja, montar um cardápio composto por três itens distintos. A tarefa, deste modelo de exercício, consiste em determinar o número de agrupamentos que podem ser formados com três tipos, distintos, de objetos, sendo que, cada tipo de objeto contém um determinado número de elementos.

Técnica: A Técnica deste modelo de exercício pode ser dividida em três estágios:

1º estágio: determinar o número de etapas que compõem o evento. Neste exercício o número de etapas são 3.

2º estágio: determinar o número de possibilidades de cada etapa. Neste caso temos:

1º etapa: 5 possibilidades;

2º etapa: 4; possibilidades;

3º etapa: 3. possibilidades;

3º estágio: multiplicar os números de possibilidades de cada etapa, ou seja, aplicar o PFC. Neste exercício temos: $5 \times 4 \times 3$.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) para determinar o número de refeições possíveis para serem montadas.

Vale observar que, o autor sugere uma seqüência de seis exercícios para construir o conceito do Princípio Fundamental da Contagem. Esses seis exercícios seguem o padrão do Modelo 1, por essa razão podemos conjecturar que essa seqüência de exercícios não favorece a construção do raciocínio combinatório por não abordar diversos enfoques do mesmo conceito.

Livro 2: Observando, a seqüência de exercícios apresentada pelas autoras, encontramos três modelos distintos de exercícios.

Exemplo do Modelo1*:* Um salão de festas tem 8 portas. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode entrar e sair dele uma única vez?

Tarefa: determinar o número de maneiras que uma pessoa pode entrar e sair da sala uma só vez, ou seja, definir um trajeto para a pessoa entrar e, logo após, sair da sala. Nesta situação, temos a tarefa de determinar o número de agrupamentos que podem ser formados por 2 eventos distintos, sendo que, em cada evento temos o mesmo número de opções – neste caso: número de portas.

Técnica: multiplicação do número de possibilidades das duas etapas do evento. Neste problema, descreveremos a técnica dividindo-a em três estágios:

1º estágio: Determinar o número de etapas que compõem o evento. Neste exercício temos 2 etapas.

2º estágio: Determinar o número de possibilidades de cada etapa. Neste caso temos:

1º etapa: 8 possibilidades – 8 portas disponíveis para entrar na sala.

2º etapa: 8 possibilidades – também, temos 8 portas para sair da sala.

3º estágio: multiplicar os números de possibilidades de cada etapa. Neste problema temos: 8x8.

Observe-se aqui que a técnica descrita é a mesma apresentada no modelo anterior, o que caracteriza uma organização local, segundo os termos de Chevallard (1999).

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) para *n* etapas sucessivas.

Exemplo do Modelo 2: Quantos números existem entre 1000 e 2000, cada um formado por algarismos distintos e escolhidos entre os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Tarefa: Determinar a quantidade de números que há em um intervalo numérico dado (no problema o intervalo dado é de 1000 a 2000), utilizando-se, apenas, de algarismo, distintos, e, delimitados no enunciado do problema.

Técnica: Multiplicar o número de possibilidades das quatro etapas do evento. Neste problema, descreveremos a técnica dividindo-a em três estágios:

1º estágio: determinar, dentre os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, aqueles que poderão ser escolhidos para “a casa do milhar”.

2º estágio: Determinar o número de possibilidades de cada etapa. No caso deste problema, temos:

1º etapa: 1 possibilidade – fixar o algarismos 1 na “casa do milhar” (realizado no 1º estágio).

2º etapa: 5 possibilidades – o algarismo da “casa da centena” deve ser diferente do algarismo da “casa do milhar”.

3º etapa: 4 possibilidades – o algarismo da “casa da dezena” deve ser diferente do algarismo da “casa do milhar” e, também, do algarismo da “casa da centena”.

4º etapa: 3 possibilidades – o algarismo da “casa da unidade” deve ser diferente de todos os algarismos anteriores.

3º estágio: multiplicar os números de possibilidades de cada etapa. Então, neste problema temos: $1 \times 5 \times 4 \times 3$.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) para *n* etapas sucessivas (o que não foi demonstrado como válido para o aluno, este deve deduzir a validade a partir do seu uso e de generalizações de modelos anteriores)

Exemplo do Modelo 3: Numa sala existem 10 lâmpadas. Calcule o número de maneiras de essa sala estar iluminada, sabendo que todas as lâmpadas não podem estar acessas ao mesmo tempo.

Tarefa: determinar o número de maneiras de iluminar a sala utilizando-se das 10 lâmpadas.

Técnica: Multiplicar o número de possibilidades das dez etapas do evento. Neste problema, descreveremos a técnica dividindo-a em quatro estágios:

1º estágio: Determinar o número de etapas do evento. Neste exercício temos 10 etapas.

2º estágio: Determinar o número de possibilidades de cada etapa. Neste caso temos 2 possibilidades para cada etapa (em cada etapa podemos ter a luz acesa ou apagada).

3º estágio: multiplicar os números de possibilidades de cada etapa. Neste exercício temos: $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{\text{10 fatores}} = 1024$

4º estágio: De todos os eventos obtidos da multiplicação do estágio anterior, subtrair um evento (evento, no qual, todas as luzes estão apagadas – a sala não está iluminada). Neste caso teremos: $1024 - 1 = 1023$.

<u>*Discurso Tecnológico-Teórico:*</u> utilização do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) para *n* etapas sucessivas (o que não foi demonstrado como válido para o aluno, que deve deduzir a validade a partir do seu uso e da generalização dos modelos anteriores)

Vale observar que, as autoras sugerem uma seqüência de 19 exercícios para construir o conceito do Princípio Fundamental da Contagem. Esses exercícios seguem o padrão dos Modelos 1, 2 e 3 (já descritos). Por essa razão, conjecturamos, também, que essa seqüência de exercícios pode não favorece a construção do raciocínio combinatório, pois há poucos modelos distintos de exercícios a serem resolvidos pelos alunos.

Livro 3: Observando a seqüência de exercícios apresentada pelos autores, encontramos sete modelos distintos de exercícios. Desses setes modelos encontrados, três já foram analisados nos livros 1 e 2 – ***Exemplo Modelos 1, 2 e 3*** – então, para evitar ser repetitivos e redundantes nas análises, nos limitaremos a analisar, os demais modelos que nomearemos por: ***Exemplo Modelos 4, 5, 6 e 7.***

Exemplo do Modelo 4: Deseja-se formar números divisíveis por 5, compostos de quatro algarismos distintos. Quantas são as possibilidades dispondo-se dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6? (sugestão: analise dois casos: quando o número termina por zero e quando ele termina por 5).

<u>*Tarefa:*</u> Determinar a quantidade de números divisíveis por 5, utilizando-se quatro algarismos distintos delimitados no enunciado do problema. A tarefa deste modelo de exercício consiste em determinar o número de agrupamentos que podem ser formados com sete objetos distintos (os sete números fornecidos no enunciado), sendo que, uma das etapas tem restrições (divisível por 5).

<u>*Técnica:*</u> Multiplicar o número de possibilidades das quatro etapas do evento. Neste problema, descreveremos a técnica dividindo-a em cinco estágios:

1º estágio: Fixar o algarismo 0 na “casa da unidade”.

2º estágio: Determinar o número de possibilidades das etapas restantes.

3º estágio: Multiplicar os números de possibilidades de cada etapa.

4º estágio: Fixar o algarismo 5 na “casa da unidade” e repetir as técnicas efetuadas nos estágios 2 e 3.

5º estágio: Somar os resultados obtidos nas multiplicações dos estágios anteriores, ou seja, no caso em que o algarismo 0 está na “casa da unidade” e o caso em que o algarismo 5 está na “casa da unidade”.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) para *n* etapas sucessivas (o que não foi demonstrado como válido para o aluno, este deve deduzir a validade a partir do seu uso e de generalizações de modelos anteriores).

Exemplo do Modelo 5: Quantos números de três algarismos têm pelo menos dois algarismos repetidos?

Tarefa: Determinar a quantidade de números de três algarismos que tenha, pelo menos, dois algarismos repetidos. A tarefa, deste modelo de exercício, consiste em determinar o número de agrupamentos, de 3 etapas, que podem ser formados utilizando dez objetos distintos (dez algarismos disponíveis no sistema numérico decimal), sendo que, esses agrupamentos podem conter, pelo menos, dois objetos repetidos.

Técnica: Para descrever essa técnica dividiremos o problema em três momentos.

1º momento: Determinar a quantidade de número de três algarismos, sendo que, os algarismos, que compõem o número, poderão se repetir. A técnica, neste caso, pode ser descrita por 3 estágios:

1º estágio: Determinar o número de etapas que compõem o evento. Neste exercício temos 3 etapas.

2º estágio: Determinar o número de possibilidades de cada etapa, ou seja: 1º etapa: 9 possibilidades – a “casa do milhar” não pode ser zero.

2º etapa: 10 possibilidades – qualquer algarismo pode ser inserido na "casa da centena".

3º etapa: 10 possibilidades – qualquer algarismo pode ser inserido na "casa da dezena".

3º estágio: Multiplicar os números de possibilidades de cada etapa.

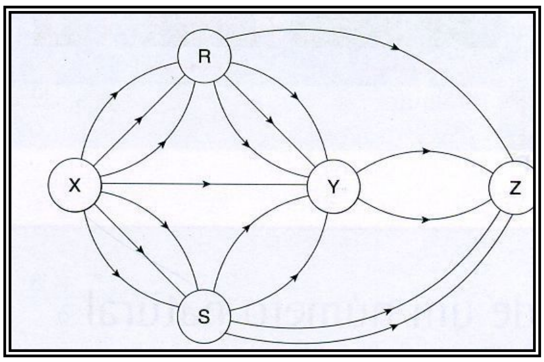
2º momento: Determinar a quantidade de números de três algarismos distintos, ou seja, neste caso, os algarismos que compõem o número não poderão se repetir.

Vale observar que a técnica aplicada no 2º momento é a mesma técnica descrita no ***Exemplo do Modelo 2***. Para não sermos redundantes, optamos em não descrevê-la novamente.

3º momento: Subtrair o resultado obtido no 1º momento pelo resultado obtido no 2° momento.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) para *n* etapas sucessivas (o que não foi demonstrado como válido para o aluno, este deve deduzir a validade a partir do seu uso e de generalizações de modelos anteriores).

Exemplo de Modelo 6*:* Observe o diagrama.



Qual é o número de ligações distintas entre X e Z?

Tarefa: determinar o número de ligações distintas entre X e Z. A tarefa, deste modelo de exercício, consiste em determinar o número de agrupamentos de dois ou três eventos, sendo que, cada evento, contém um número específico de elementos.

Técnica: Para descrever essa técnica dividiremos o problema em três estágios:

1º estágio: Descrever todos os caminhos possíveis entre X e Z. Por exemplo: $X \to R \to Z$ ou $X \to R \to Y \to Z$ são dois caminhos distintos possíveis entre X e Z.

2º estágio: Determinar o número de etapas que compõem cada um dos caminhos descritos. Neste exercício, observamos ligações compostas por duas etapas e ligações compostas por três etapas. Por exemplo:

O caminho $X \to R \to Z$ possui duas etapas;

O caminho $X \to R \to Y \to Z$ possui três etapas.

3º estágio: Em cada caminho, descrita no 1º estágio, determinar o número de possibilidades de cada etapa. Por exemplo, este caminho $X \to R \to Z$ possui:

1º etapa: 3 possibilidades;

2º etapa: 1 possibilidade.

4º estágio: Em cada caminho, multiplicar os números de possibilidades de cada etapa.

5º estágio: Somar todos os resultados obtidos no 4º estágio.

Vale observar que a técnica utilizada nesta tarefa é muito semelhante a técnica utilizada no ***Exemplo de Modelo 1***. A diferença consiste em observar que o problema deve ser dividido em partes (caminhos possíveis entre X e Z), e, após isso, utilizar a técnica do ***Exemplo de Modelo 1*** em cada caminho possível.

Os autores sugerem uma seqüência de 31 exercícios para construir o conceito do Princípio Fundamental da Contagem. Esses exercícios seguem o padrão dos Modelos 1, 2, 3, 4, 5, e 6.

Comparando essa seqüência de exercícios, com as seqüências analisadas nos livros 1 e 2, podemos conjecturar que o conjunto de exercícios do livro 3 possui mais possibilidades de favorecer a construção do raciocínio combinatório, pois temos um número mais variado de modelos de exercícios.

Salientamos, também, que em todos os modelos apresentados, o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) é a tecnologia que justifica a utilização das técnicas utilizadas. Contudo, o PFC é enunciado, apenas, para eventos compostos por duas etapas sucessivas e independentes, mas, em alguns dos modelos de exercícios apresentados, o Princípio Fundamental da Contagem foi amplamente utilizado, isto é, foi utilizado, também, nos modelos, no qual, havia mais de duas etapas sucessivas.

A Teoria que justifica a utilização do PFC em eventos compostos por mais de duas etapas é a Álgebra e é neste campo algébrico que podemos demonstrar que esta utilização se justifica.

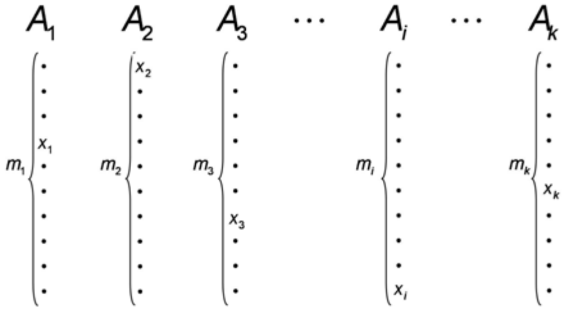
Para justificar esta utilização necessitamos, neste campo algébrico, demonstrar o Princípio Fundamental da Contagem em eventos compostos por mais de duas etapas sucessivas e independentes. Para essa demonstração utilizaremos o Princípio da Indução Finita (PIF).

(I) Para $n = 2$ o teorema recai no Princípio Fundamental da Contagem.

(II) Suponhamos que o teorema seja verdadeiro para $n = k \ (k \leq 2)$, isto é, a seqüência de acontecimentos sucessivos $(A_1, A_2, A_3, ..., A_k)$ pode ocorrer de $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot ... \cdot m_k$ maneiras diferentes (hipótese de indução), e provemos que ela é verdadeira para $n = k + 1$.

(III) Seja agora a seqüência de acontecimentos sucessivos $(A_1, A_2, A_3, ..., A_k, A_{k+1})$, onde A_{k+1} pode ocorrer de m_{k+1} maneiras diferentes.

(IV) Seja $x^* = (x_1, x_2, x_3, ..., x_k)$ uma seqüência de ocorrências, onde x_i é uma das m_i possíveis ocorrências de $A_i \ (i = 1, 2, 3, ...k)$. Confira o quadro abaixo.



$x^* = (x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_k)$

Pela hipótese de indução, x^* pode ser determinada de $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot ... \cdot m_k$ maneiras diferentes.

(V) Seja x_{k+1} uma das m_{k+1} maneiras pelas quais A_{k+1} pode ocorrer. Como, por (IV), x^* pode ser determinada por m maneiras diferentes, e x_{k+1} de m_{k+1} maneiras diferentes, segue-se pelo Princípio Fundamental da Contagem (PFC), que x^* e x_{k+1} pode ser determinadas de $m \cdot m_{k+1} = (m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot ... \cdot m_k) \cdot m_{k+1}$ modos diferentes.

Todavia, determinar x^* e x_{k+1} equivale a determinar a seqüência de ocorrências $(x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_k, x_{k+1})$.

(VI) Assim, a determinação das ocorrências $x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_k, x_{k+1}$ pode ser efetuada de $\cdot m_{k+1} m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot ... \cdot m_k \cdot m_{k+1}$ maneiras diferentes, e, assim, a demonstração por indução está completa.

Permutação Simples.

Para desenvolver o conceito de Permutação Simples observamos que cada livro didático opta por uma estratégia didática diferente. Descreveremos, brevemente, estas opções, apenas para caracterizar as orientações e direções escolhidas pelos autores, pois, como já salientamos anteriormente, neste trabalho, não pretendemos fazer uma análise didática dos livros, aqui, analisados.

O autor do livro 1 utiliza-se de uma seqüência de dois exemplos contextualizados e resolvidos para induzir os alunos a conceituar Permutação Simples. Após essa seqüência, utilizando a fórmula algébrica, define Permutação Simples – $(P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1)$.

O texto do livro segue com uma seqüência de exemplos resolvidos, utilizando essa fórmula. Vale observar a ênfase dada pelo autor, pela utilização da fórmula, na apresentação dos exemplos resolvidos. Após a resolução desses exemplos, o autor sugere uma seqüência de 10 exercícios envolvendo os conceitos de Permutação Simples.

As autoras do livro 2 optaram por uma estratégia diferente se, comparada, com a estratégia utilizada, anteriormente, por elas, para conceituar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Para conceituar o PFC, as autoras utilizaram-se de exemplos contextualizados e resolvidos, com o objetivo de induzir os alunos a construir o conceito do PFC. Por outro lado, para definir Permutação Simples e Arranjo Simples, optaram, apenas, em definir algebricamente estes conceitos, ou seja, apenas exibiram as fórmulas algébricas de Permutação e Arranjo Simples, seguidas de uma seqüência de exemplos resolvidos, no qual, essas fórmulas foram largamente utilizadas.

Vale salientar que, as autoras preferiram conceituar Permutação e Arranjo Simples em um único espaço do livro, ou seja, em um único texto, desta maneira, a seqüência de exemplos resolvidos e exercícios propostos apresentam uma mistura desses conceitos.

Para organizar e estruturar nosso trabalho, optaremos em analisar, neste momento, apenas, os exercícios relativos ao conceito de Permutação Simples, para, em seguida, analisarmos os exercícios relativo ao conceito de Arranjo Simples.

Os autores do livro 3, também, optam em definir apenas algebricamente, o conceito de Permutação Simples, ou seja, apresentaram uma fórmula algébrica seguidas de uma seqüência de exemplos resolvidos, no qual, essa fórmula é utilizada. Uma série de 16 exercícios é sugerida, logo após esses exemplos.

Vale salientar que, para definir Permutação Simples, os autores optam em utilizar-se da definição de Arranjo Simples, ou seja, consideram a Permutação Simples como um caso particular de Arranjo Simples $\left(P_n = A_{n,n}\right)$.

No texto do livro 3, a definição de Arranjo Simples foi introduzida antes da definição de Permutação Simples, o que justifica esta escolha. Novamente, destacamos que, para organizar nosso trabalho, neste momento, analisaremos, somente, a seqüência de exercícios relativos ao conceito de Permutação Simples.

Livro 1: Observando, a seqüência de exercício de Permutação Simples apresentada pelo autor, encontramos três modelos distintos de exercícios.

Exemplo do Modelo 1: De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode sentar-se num banco de 5 lugares para tirar uma foto?

Tarefa: Determinar o número de maneira que 5 pessoas podem sentar-se em um banco. A tarefa, deste modelo de exercício, consiste em determinar o número de filas (neste caso a ordem em que as pessoas estão dispostas geram uma nova fila, ou seja, um novo agrupamento) possíveis de organizar com 5 objetos.

Técnica: A técnica deste modelo de exercícios pode ser dividida em dois estágios:

1º estágio: determinar o número de objetos que compõem a fila a ser organizada. Neste exercício o número de objetos é 5.

2º estágio: permutar, ou seja, usar o conceito de permutação nos 5 objetos a ordenar. Nessa situação teremos: $P_5 = 5! = 120$.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização da definição e do conceito de Permutação Simples para *n* objetos organizados em fila.

Exemplo do Modelo 2: De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode sentar-se num banco de 5 lugares, ficando duas delas (por exemplo, pai e mãe) sempre juntos, em qualquer ordem?

Tarefa: Determinar o número de maneira que 5 pessoas podem sentar-se em um banco, sendo que, duas determinadas pessoas devem ficar juntas. A tarefa, deste modelo de exercício, consiste em determinar o número de filas (neste caso a ordem em que as pessoas estão dispostas gera uma nova fila, ou seja, um novo agrupamento) possíveis de organizar com 5 objetos, sendo que, 2 desses objetos devem ficar um ao lado do outro.

Técnica: Neste problema, descreveremos a técnica dividindo-a em quatro estágios:

1° estágio: determinar o número de objetos que compõem a fila a ser organizada. Neste exercício, o número de objetos é 4, pois os dois objetos que deverão ficar juntos devem ser observados como um objeto único.

2º estágio: permutar, ou seja, usar o conceito de permutação nos 4 objetos a ordenar. Nessa situação temos: $P_4 = 4! = 24$.

3º estágio: permutar os objetos que deverão ficar juntos. Nesse exercício temos: $P_2 = 2! = 2$. De fato, para cada um dos agrupamentos determinados no 2º estágio (24 agrupamentos), temos 2 possibilidades diferentes, isto é, a permutação dos dois objetos que deverão ficar juntos.

4º estágio: multiplicar o resultado obtido no 2º estágio com o resultado obtido no 3º estágio. Nesse exercício temos: $P_4 \cdot P_2 = 24 \cdot 2 = 48$.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização da definição e do conceito de Permutação Simples para *n* objetos organizados em fila.

Exemplo do Modelo 3: Quantos números naturais de algarismos distintos entre 5000 e 10000 podemos formar com os algarismos 1, 2, 4 e 6?

Tarefa: Determinar a quantidade de números entre 5000 e 10000 utilizando-se quatro algarismos distintos e, delimitados no enunciado do problema. A tarefa, deste modelo de exercício, consiste em determinar a quantidade de filas que podem ser ordenadas com quatro objetos distintos (os quatro números fornecidos no enunciado), sendo que, há uma restrição (o número deve estar entre 5000 e 10000, ou seja, neste caso, a "casa do milhar" deve ser 6).

Técnica: Neste problema, descreveremos a técnica dividindo-a em dois estágios:

1º estágio: determinar, dentre os algarismos 1, 2, 4, e 6, aqueles que poderão ser escolhidos para "a casa do milhar", ou seja, dentre os objetos disponíveis, selecionar aqueles deverão ocupar um determinado lugar na fila. Nesta situação temos que a "casa do milhar" só poderá ser ocupada pelo algarismo 6.

2º estágio: permutar, ou seja, usar o conceito de permutação nos 3 objetos restantes a ordenar. Nessa situação temos: $P_3 = 3! = 6$.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização da definição e do conceito de Permutação Simples para *n* objetos organizados em fila.

Livro 2: Observando, a seqüência de exercícios apresentada pelas autoras, deparamos com quatro modelos distintos de exercícios. Desses quatro modelos, três já foram analisados no livro 1, então, para não sermos redundantes nas análises, nos dedicaremos a analisar o ***Exemplo Modelo*** que não foi analisado até então.

Exemplo do Modelo 4: Considere os números obtidos do número 12345 efetuando-se todas as permutações de seus algarismos. Colocando esses números em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 42521?

Tarefa: Determinar a posição ocupada pelo número 42521 quando se organiza, em ordem crescente, os números de 5 algarismos, obtidos da permutação dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Esta tarefa tem o objetivo de ordenar todas as filas possíveis de se obter com 5 algarismos e determinar a posição de certo número dado no enunciado.

Técnica: Neste problema, descreveremos a técnica dividindo-a em sete estágios:

1º estágio: determinar o número de objetos que compõem a fila a ser organizada. Neste exercício o número de objetos é 5 (5 algarismos).

2º estágio: determinar, dentre os algarismos 1, 2, 3, 4, e 5, aqueles que poderão ser escolhidos para "a casa da dezena de milhar", ou seja, dentre os objetos disponíveis, selecionar aqueles deverão ocupar um determinado lugar na fila. Nesta situação temos que a "casa da dezena de milhar" poderá ser ocupada por três algarismos: 1, 2 e 3.

3º estágio: permutar, ou seja, usar o conceito de permutação nos 4 objetos restantes a ordenar. Nessa situação temos: $P_4 = 4! = 24$.

4º estágio: fixar o algarismo 4 na “casa da dezena de milhar”, ou seja, fixar um determinado objeto em uma determinada posição da fila.

5º estágio: determinar, dentre os algarismos 1, 2, 3, e 5, aqueles que poderão ser escolhidos para “a casa do milhar”, ou seja, dentre os objetos disponíveis, selecionar aqueles que deverão ocupar um determinado lugar na fila. Nesta situação temos que a “casa do milhar” poderá ser ocupada por dois algarismos, no caso: 1 e 2.

6º estágio: permutar, ou seja, usar o conceito de permutação nos 3 objetos restantes a ordenar. Nessa situação temos: $P_3 = 3! = 6$.

7º estágio: fixar o algarismo 3 na “casa do milhar”, ou seja, fixar um determinado objeto em uma determinada posição da fila.

Para determinar os algarismos que ocuparão as “casas” da centena, dezena e unidade utilizam-se as mesmas técnicas descritas nos estágios 2º, 3º e 4º ou, o 5º, 6º e 7º, então, para evitar ser redundante, apenas salientaremos esse processo repetitivo.

Ao final do processo teremos a quantidade de números de 5 algarismos que são menores que 42521, e, consequentemente, a posição do número 42521.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização da definição e do conceito de Permutação Simples para *n* objetos organizados em fila.

Livro 3: Observando, a seqüência de exercícios apresentada pelos autores, deparamos com cinco modelos distintos de exercícios. Desses cinco modelos, quatro já foram analisados no livro 1 e 2, então, para não sermos redundantes nas análises, nos dedicaremos a analisar o ***Exemplo-Modelo*** que não foi analisado até então.

Exemplo do Modelo 4: Calcule: $\frac{P_7}{P_3}$

Tarefa: Utilizando-se da definição algébrica de permutação calcular a fração dada no exercício.

Técnica: Neste problema, descreveremos a técnica dividindo-a em três estágios:

1º estágio: desenvolver as permutações dadas no enunciado do exercício. A técnica utilizada neste estágio é a aplicação direta da definição de permutação.

2º estágio: efetuar as simplificações convenientes. A técnica utilizada é a simplificação de fração.

3º estágio: efetuar a multiplicação dos números após a simplificação.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização da definição de Permutação Simples para *n* objetos organizados em fila.

Para finalizar, observando as analises dos ***Exemplos-Modelo*** encontrados e descritos nos três livros didáticos, notamos que há uma variedade pequena de modelos distintos de exercícios relativos ao conceito de Permutação Simples. Por esse fato, podemos conjecturar que essa pouca variedade de exercícios poderá comprometer a construção do conceito de Permutação.

Arranjo Simples.

A fim de iniciar uma análise matemática do conceito de Arranjo Simples, novamente, optaremos em comentar, resumidamente, as opções didáticas dos autores dos livros.

Temos o objetivo de situar as diferentes estratégias didáticas elegidas dos autores, não esquecendo, contudo, que o propósito deste trabalho é em realizar, apenas, uma análise matemática, relativa aos conceitos de contagem, dos livros didáticos do Ensino Médio.

O autor do livro 1 utiliza, novamente, como no caso em que introduz o conceito de permutação simples, de uma seqüência de dois exemplos contextualizados e resolvidos para induzir os alunos a conceituar Arranjo Simples. Após essa seqüência, utilizando fórmulas algébricas, define Arranjo Simples – $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

O texto do livro segue com uma série de exemplos resolvidos com o propósito de utilizar essa fórmula (neste caso, o número de exemplos é bem maior que nas demais situações já analisadas – 22 exemplos resolvidos). Vale observar, que na resolução desses exemplos o autor enfatiza o uso da fórmula algébrica.

Após apresentar esses exemplos resolvidos, o autor sugere uma seqüência de 12 exercícios envolvendo o conceito de Arranjo Simples.

As autoras do livro 2 utilizam-se, apenas, de um exemplo resolvido para induzir ou exemplificar o uso do conceito de Arranjo Simples. Após a resolução deste exemplo, define, algebricamente, o conceito, ou seja, apresentam a fórmula algébrica, seguida de uma seqüência de exemplos resolvidos, no qual, essa fórmula é diretamente aplicada.

Os autores do livro 3, também, optam em definir apenas, algebricamente, o conceito de Arranjo Simples, ou seja, apresentam a fórmula algébrica seguida de uma seqüência de exemplos resolvidos, no qual, essa fórmula é, largamente utilizada. Uma série de 16 exercícios é sugerida, logo após esses exemplos.

Livro 1: Observando, a seqüência de exercício de Arranjo Simples apresentado pelo autor, encontramos três modelos distintos de exercícios.

Exemplo do Modelo 1: Calcule $A_{8,2}$.

<u>*Tarefa*</u>*:* Calcular o valor de $A_{8,2}$, ou seja, utilizando-se da fórmula algébrica, dada no texto do livro, calcular o valor do Arranjo Simples pedido no exercício.

<u>*Técnica*</u>*:* A técnica deste modelo de exercícios pode ser dividida em quatro estágios:

1º estágio: substituir os valores da expressão dada no enunciado do exercício, na formula algébrica. Nesse caso teremos: $A_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)!}$.

2º estágio: desenvolver os fatoriais que se apresentam no numerado e denominador da fração.

3º estágio: fazer as simplificações pertinentes.

4º estágio: efetuar a multiplicação dos fatores.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização da definição de Arranjo Simples para *n* objetos organizados em fila de *p* objetos.

Exemplo do Modelo 2: Um clube tem 30 membros. A diretoria é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras é possível formar uma diretoria?

Tarefa: Determinar o número de maneira de escolher 4 pessoas de um total de 30 candidatos para a diretoria de um clube. A tarefa deste modelo de exercício consiste em escolher, ordenadamente, 4 objetos de um total de 30 objetos disponíveis.

Técnica: A técnica deste modelo de exercícios pode ser dividida em dois estágios:

1º estágio: determinar o número de objetos a ser ordenado, ou seja, determinar o número de objetos que irá compor a fila a ser organizada. Neste caso temos 4 objetos a serem ordenados.

2º estágio: ordenar (arranjar) quatro objetos do total de 30 objetos disponíveis, ou seja, aplicar a fórmula algébrica utilizando os dados do enunciado. Neste exercício temos: $A_{30,4} = \frac{30!}{(30-4)!} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização da definição e do conceito de Arranjo Simples para *n* objetos organizados em fila de *p* objetos.

Exemplo do Modelo 3: Considere os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Quantos números de quatro algarismo distintos que terminem com 7 podemos escrever?

Tarefa: Determinar a quantidade de números de 4 algarismos que podemos formar escolhidos de um total de 9 algarismos, sendo que, o algarismo da “casa da unidade" deverá ser 7. A tarefa deste modelo de exercício consiste em escolher, ordenadamente, 4 objetos de um total de 9 objetos disponíveis, levando em consideração a restrição dada no exercício, ou seja, um determinado objeto deverá ocupar uma posição estabelecida no enunciado.

Técnica: A técnica deste modelo de exercícios pode ser dividida em três estágios:

1º estágio: Fixar o algarismo 7 na "casa da unidade".

2º estágio: determinar o número de objetos a ser ordenado, ou seja, determinar o número de objetos que irá compor a fila. Neste caso temos 3 objetos para ordenar de um total de 8 objetos disponíveis.

3º estágio: ordenar (arranjar) três objetos do total de 8 objetos disponíveis, ou seja, aplicar a fórmula algébrica utilizando os dados do enunciado. Neste exercício temos: $A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização da definição e do conceito de Arranjo Simples para *n* objetos organizados em fila de *p* objetos.

Livro 2: Observando a seqüência de exercícios proposta pelas autoras, encontramos, apenas, três ***Exemplos Modelos*** distintos de exercícios. Esses três modelos são semelhantes aos modelos analisados no livro 1, então, com o objetivo de não repetir as análises já realizadas, optamos em, somente, citar essa comparação entre os modelos de exercícios propostos pelos autores do livro 1 e do livro 2.

Livro 3: Observando, a seqüência de exercício de Arranjo Simples apresentado pelos autores, encontramos quatro ***exemplos modelos*** distintos de exercícios. Desses quatro modelos, três já foram analisados no livro 1, então, para não sermos redundantes nas análises, nos dedicaremos a analisar o ***Exemplo Modelo*** que não foi analisado até então.

Exemplo do Modelo 4: a) Somente com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, quantos números pares de três algarismos distintos existem?

b) Em relação ao item anterior: se fosse permitida a repetição de algarismos, poderíamos utilizar a fórmula do arranjo? Justifique.

Para iniciar a análise desse problema, primeiramente, salientaremos que o item a) é um exercício da categoria do ***Exemplo do Modelo 2*** que já foi analisado no livro 1. Por essa razão, nos dedicaremos a analisar o item b), e indicaremos este item do exercício de ***Exemplo do Modelo 4***.

Tarefa: Interpretar os conceitos utilizados na resolução do item a), e verificar se esses conceitos podem ser utilizados, novamente, no item b). A tarefa deste modelo de exercício consiste em analisar a aplicabilidade de dois conceitos já estudados – o conceito de Arranjo Simples e o Princípio Fundamental da Contagem – com o objetivo de aplicar o conceito do Princípio Fundamental da Contagem na resolução.

Técnica: A técnica deste modelo de exercícios pode ser dividida em três estágios:

1º estágio: ler, entender e resolver o exercício proposto no item a).

2º estágio: ler e entender o enunciado do exercício do item b).

3º estágio: perceber que os objetos agrupados no item b) não são distintos, por esse fato, o conceito de Arranjo Simples não pode ser aplicado.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização do conceito de Arranjo Simples para n objetos organizados em fila de p objetos e do conceito do Princípio Fundamental da Contagem.

Combinação

Para iniciar a análise matemática da definição e do conceito de Combinação optamos, novamente, em comentar alguns aspectos das escolhas didáticas dos autores dos livros, a fim de caracterizar as opções escolhidas por eles.

Para introduzir o conceito de Combinação observamos que os três autores optam por uma estratégia didática semelhante, assim, introduzem este conceito utilizando-se de exemplos resolvidos e contextualizados, a fim de induzir os alunos a conceituar Combinação. Após essa seqüência de exemplos resolvidos observa-se a apresentação da fórmula algébrica, ou seja, a definição de Combinação – $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

O texto dos três livros segue com exemplos resolvidos que utilizam, diretamente, a definição de Combinação, isto é, o uso da fórmula apresentada. Vale observar que os três autores enfatizam a aplicabilidade direta da fórmula algébrica na resolução dos exemplos.

Observamos que, após apresentarem a resolução dos exemplos, os autores sugerem uma seqüência de exercícios envolvendo a definição e o conceito de Combinação.

Livro 1: Observando, a seqüência de exercício de Combinação apresentado pelo autor, encontramos três modelos distintos de exercícios.

Exemplo do Modelo 1: Calcule o valor de $C_{5,3}$.

Tarefa: Calcular o valor de $C_{5,3}$, ou seja, utilizando-se da fórmula algébrica dada no texto do livro, calcular o valor da Combinação pedida no exercício.

Técnica: A técnica deste modelo de exercícios pode ser dividida em quatro estágios:

1º estágio: substituir os valores da expressão dada no enunciado do exercício, nas fórmula algébrica. Nesse caso teremos: $C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$.

2º estágio: desenvolver os fatoriais que se apresentam no numerador e denominador da fração.

3º estágio: fazer as simplificações pertinentes.

4º estágio: efetuar a multiplicação dos fatores.

<u>*Discurso Tecnológico-Teórico:*</u> utilização da definição de Combinação para *n* objetos organizados em grupos de *p* objetos.

Exemplo do Modelo 2: Quantas equipes de 3 astronautas podem ser formadas com 20 astronautas?

<u>*Tarefa*</u>*:* Determinar o número de maneira de escolher 3 astronautas de um total de 20 astronautas para formar uma equipe. A tarefa, deste modelo de exercício, consiste em escolher, 3 objetos de um total de 20 objetos disponíveis, sendo que a ordem em que os objetos são escolhidos não interfere no processo da contagem.

<u>*Técnica*</u>*:* A técnica deste modelo de exercícios pode ser dividida em dois estágios:

1º estágio: determinar o número de objetos que formaram a equipe a ser montada, ou seja, determinar o número de objetos que irá compor o grupo, não levando em consideração a ordem de escolha desses objetos. Neste caso temos 3 objetos a serem escolhidos.

2º estágio: escolher três objetos (sem ordem) do total de 20 objetos disponíveis, ou seja, aplicar a fórmula algébrica utilizando os dados do enunciado. Neste exercício temos: $C_{20,3} = \dfrac{20!}{3!(20-3)!} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$.

<u>*Discurso Tecnológico-Teórico:*</u> utilização da definição e do conceito de Combinação para *n* objetos dispostos em grupos de *p* objetos.

Exemplo do Modelo 3: Uma associação tem uma diretoria formada por 10 pessoas: 6 homens e 4 mulheres. De quantas maneiras podemos formar uma comissão dessa diretoria que tenha 3 homens e 2 mulheres?

<u>*Tarefa*</u>*:* Determinar o número de maneiras de montar uma comissão de 3 homens e 2 mulheres, de um total de 10 pessoas (6 homens e 4 mulheres). A tarefa, deste modelo de exercício, consiste em montar comissões formadas por dois subgrupos. O 1º subgrupo é formado da escolha de 3 objetos de um total de 6

objetos e o 2º subgrupo é formado da escolha de 2 objetos de um total de 4 objetos, sendo que, os objetos que formam o 1º subgrupo diferem dos objetos do 2º subgrupo.

Técnica: Dividiremos a técnica aqui descrita em três momentos: no 1º momento faremos uma análise da formação do subgrupo formado pelos homens, no 2º momento uma análise da formação do subgrupo formado pelas mulheres e, para finalizar, no 3º momento, uma análise dos números de comissões possíveis de se formar que tenha 3 homens e 2 mulheres.

1º momento: Determinar o número de subgrupos formado, apenas, por homens. Este momento será divido em dois estágios:

1º estágio: determinar o número de objetos que formam o subgrupo a ser montado, ou seja, determinar o número de objetos que irá compor o subgrupo, não levando em consideração a ordem da escolha desses objetos. Neste caso temos 3 objetos a serem escolhidos.

2º estágio: escolher três objetos (sem ordem) do total de 6 objetos disponíveis, ou seja, aplicar a fórmula algébrica utilizando os dados do enunciado. Neste exercício temos: $C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ subgrupos.

2º momento: Determinar o número de subgrupos formado, apenas, por mulheres. A análise deste 2º momento é semelhante da análise descrita no 1º momento, então, para não sermos redundantes na apresentação desta análise, apenas indicaremos o cálculo algébrico que deverá ser realizado neste 2º momento: $C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$.

3º momento: Multiplicar o número de subgrupos obtido no 1º momento pelo número de subgrupos obtido no 2º momento, ou seja, multiplicar os 20 subgrupos de homens pelos 6 subgrupos de mulheres.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização da definição e do conceito de Combinação para *n* objetos dispostos em grupos de *p* objetos.

Livro 2: Observando, a seqüência de exercícios apresentada pelas autoras, deparamos com seis modelos distintos de exercícios. Desses seis modelos, três já foram analisados no livro 1, então, para não sermos redundantes nas análises, nos dedicaremos a analisar os ***Exemplos Modelo*** que não foram analisados até então.

Exemplo do Modelo 4: São dadas 2 retas paralelas distintas r e s. Marcam-se 7 pontos distintos na reta r e 4 pontos distintos na reta s. Calcule o número de triângulos que podemos desenhar com vértices nesses pontos.

Esse exercício é uma variação do ***Exemplo do Modelo 3***, pois, para resolvê-lo, é necessário dividi-lo em dois casos distintos, sendo que, cada caso é semelhante ao ***Exemplo do Modelo 3***. Esses casos podem ser descritos desta forma:

1º CASO: triângulos formados por 2 pontos da reta *r* e 1 ponto da reta *s*.

2º CASO: triângulos formados por 1 ponto da reta *r* e 2 pontos da reta *s*.

Por essa razão (o problema necessita ser dividido em dois casos para ser resolvido – técnica do problema), consideraremos esse problema como um novo ***Exemplo de Modelo***.

Tarefa: Determinar o número de maneiras de desenhar um triângulo utilizando 2 pontos de uma reta e 1 ponto de outra, ou seja, determinar um subgrupo de 2 elementos de uma reta e um outro subgrupo de 1 elemento da outra reta e vice-versa.

Técnica: Dividiremos a descrição da técnica utilizada neste exercício em 2 casos:

1º CASO: triângulos formados por 2 pontos da reta *r* e um ponto da reta *s*.

2º CASO: triângulos formados por 1 ponto da reta *r* e 2 pontos da reta *s*.

A técnica utilizada para descrever cada um desses dois casos é a mesma técnica descrita no ***Exemplo do Modelo 3***, então, para não sermos repetitivos, não descrevemos novamente esta técnica.

Por fim, é necessário somar o resultado obtido no *1º CASO* com o resultado do *2º CASO*, desta forma, nesse problema teremos: $C_{7,2} \cdot C_{4,1} + C_{7,1} \cdot C_{4,2}$.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização da definição e do conceito de Combinação para *n* objetos dispostos em grupos de *p* objetos.

Exemplo do Modelo 5: Em uma aula de dança de salão, há 5 homens e 5 mulheres. De quantos modos diferentes podem ser formados casais para uma dança? Ao resolver esse problema, Pedro pensou: "A primeira pessoa do casal pode ser escolhida entre as 10, porque pode ser homem ou mulher. Depois que a primeira foi escolhida, a segunda só pode ser escolhida entre as 5 pessoas do sexo oposto ao da primeira. Então há $10 \cdot 5$ modos de formar um casal para uma dança". Você concorda com Pedro? Por quê?

Tarefa: Ler e interpretar o problema, em seguida, analisar se os conceitos de contagem descritos na resolução sugerida por Pedro são válidos. A tarefa deste modelo de exercício consiste em analisar a aplicabilidade de dois conceitos já estudados – o conceito de Combinação e o Princípio Fundamental da Contagem.

Técnica: A técnica deste modelo de exercícios pode ser dividida em quatro estágios:

1º estágio: ler, entender e resolver o problema proposto.

2º estágio: entender a resolução descrita por Pedro.

3º estágio: comparar os resultados e os processos das duas resoluções – resolução descrita por Pedro e a resolução feita no 1º estágio.

4º estágio: analisar porque a resolução descrita por Pedro não é correta, ou seja, neste estágio, é necessário perceber que a ordem em que os casais são escolhidos interfere no processo da contagem.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização da definição e do conceito de Combinação para *n* objetos dispostos em grupos de *p* objetos, e, também, o conceito do Princípio Fundamental da Contagem.

Exemplo do Modelo 6: Uma estante de biblioteca tem 16 livros: 11 exemplares do livro: *"Combinatória é Fácil"* e 5 exemplares de *"Combinatória não é Difícil"*. Considere que os livros com o mesmo título sejam indistinguíveis. Determine de quantas maneiras diferentes podemos dispor os 16 livros na estante de modo que 2 exemplares de *"Combinatória não é Difícil"* nunca estejam juntos.

Tarefa: Determinar o número de maneira para ordenar 16 livros em uma estante, sendo que, 5 desses livros não poderão estar juntos. A tarefa deste modelo de exercício consiste em determinar um grupo de 5 posições nas quais os livros *"Combinatória não é Difícil"* não estejam lado a lado.

Técnica: Vale observar que, este tipo de problema questiona as maneira possíveis de se ordenar 16 livros, ou seja, a ordem, na qual, os livros são inseridos na estante deve ser considerada. Entretanto, é importante ressaltar que, a técnica utilizada na resolução desse problema envolve, de fato, o conceito de Combinação, ou seja, selecionar objetos sem levar em conta a ordem, na qual, esses objetos são selecionados.

Para analisar a técnica envolvida neste problema vamos dividi-la em dois estágios:

1º estágio: fixar as 11 posições dos livros *"Combinatória é Fácil"* na estante, respeitando a seguinte regra. Os 11 livros devem ser inseridos na estante deixando um espaço entre cada um dos exemplares, ou seja, haverá 12 espaços disponíveis (os espaços relativos às estermidades devem ser contados também) para inserir os 5 livros de *"Combinatória não é Difícil"*.

2º estágio: escolher 5 posições (neste caso não há ordem) do total dos 12 espaços disponíveis para inserir os livros *"Combinatória não é Difícil"*, ou seja, aplicar a fórmula algébrica utilizando os dados descritos neste estágios. Nessa situação temos: $C_{12,5} = \dfrac{12!}{5!(12-5)!} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792$.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização da definição e do conceito de Combinação para n_1 objetos dispostos em grupos de p_1 objetos e, também, conceito de Arranjo Simples para n_2 objetos organizados em fila de p_2 objetos.

Livro 3: Observando, a seqüência de exercícios apresentada pelos autores, deparamos com seis modelos distintos de exercícios. Desses seis modelos, cinco já foram analisados nos livros 1 e 2, então, para não sermos redundantes nas análises, nos dedicaremos a analisar o ***Exemplo Modelo*** que não foi analisado até então.

Vale ressaltar que o ***Exemplo do Modelo 6*** não aparece na lista de exercícios sugerida pelos autores, por essa razão, encontramos, também, 6 modelos diferentes de exercícios, como mostrado e analisado no livro 2.

Exemplo do Modelo 7: Em uma reunião social havia *n* pessoas; cada uma saudou as outras com um aperto de mão. Sabendo que houve ao todo 66 apertos de mão, responda: qual é o valor de *n*?

Tarefa: Determinar o número de pessoas que participam de uma reunião, sabendo que houve 66 apertos de mão ao todo, e, também, todos se cumprimentam apenas uma única vez. Esta tarefa consiste em determinar o número total de objetos, sabendo que, o total de pares possíveis, a se formar, com esses objetos é 66 (não há ordem entre os objetos selecionados para formar os pares).

Técnica: A técnica deste modelo de exercícios pode ser dividida em seis estágios:

1º estágio: ler e interpretar o problema notando que a ordem, na qual, as pessoas se cumprimentam não interfere no total de cumprimentos (66 comprimentos), ou seja, formação de grupos de 2 objetos.

2º estágio: Substituir os valores do enunciado do exercício na fórmula algébrica. Nesse caso teremos: $C_{n,2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!}$

3º estágio: desenvolver os fatoriais que se apresentam no numerador e denominador da fração.

4º estágio: fazer as simplificações pertinentes.

5º estágio: efetuar a multiplicação dos fatores.

6º estágio: resolver a equação do 2º grau, analisando os resultados obtidos na resolução desta equação, e, desta forma, determinando *n*.

<u>Discurso Tecnológico-Teórico:</u> utilização da definição e do conceito de Combinação para *n* objetos dispostos em grupos de *p* objetos.

Permutação com elementos repetidos

Para iniciar a análise matemática da definição e do conceito de Permutação com Repetição optamos, novamente, em comentar alguns aspectos das escolhas didáticas dos autores dos livros, com o objetivo de caracterizar as opções escolhidas por eles.

Para introduzir o conceito de Permutação com Repetição observamos que os três autores optam por uma estratégia didática semelhante, assim, introduzem este conceito utilizando-se de exemplo resolvidos e contextualizados a fim de induzir os alunos a conceituar Permutação com Repetição. Após essa seqüência de exemplos resolvidos observa-se a apresentação da fórmula algébrica, ou seja, a definição de Permutação com Elementos Repetitivos – $P_n^{(n_1,n_2,\ldots,n_k)} = \dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!}$.

Vale salientar que o autor do livro 1 apresenta a fórmula algébrica, ou seja, define Permutação com Repetição para, somente, 3 elementos repetitivos. Assim sendo apresenta esta definição: $P_n^{(n_1,n_2,n_3)} = \dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}$. Outra observação pertinente, nesta obra, é observar que os exemplos e, também, os exercícios apresentam mais de 3 elementos repetitivos.

O texto dos três livros segue com exemplos resolvidos que utilizam, diretamente, a definição de Permutação com Repetição, isto é, o uso da fórmula apresentada. Vale observar que os três autores enfatizam a aplicabilidade direta da fórmula algébrica na resolução dos exemplos.

Observamos que, após apresentarem a resolução dos exemplos, os autores sugerem uma seqüência de exercícios envolvendo a definição e o conceito de Permutação com Elementos Repetitivos.

Livro 1: Observando, a seqüência de exercício de Permutação com Repetição apresentado pelo autor, encontramos um modelo único de exercício.

Exemplo do Modelo 1: Determine quantos são os anagramas da palavra *MISSISSIPPI*.

Tarefa: Determinar o número de anagramas de uma palavra que contém letras repetidas. A tarefa, deste modelo de exercício, consiste em determinar o número de filas (neste caso a ordem em que às letras estão dispostas gera uma nova fila, ou seja, um novo agrupamento) possíveis de se organizar com 11 objetos, sendo que alguns desses objetos aparecem repetidamente.

Técnica: A técnica deste modelo de exercícios pode ser dividida em três estágios:

1º estágio: determinar o número de objetos que compõem a fila a ser organizada. Neste exercício o número de objetos é 11.

2º estágio: determinar, dentre os 11 objetos, aqueles que aparecem de forma repetitiva. Neste caso temos: 4 letras *I*, 4 letras *S* e 2 letras *P*.

3º estágio: permutar, ou seja, usar o conceito de Permutação com Repetição nos11 objetos a ordenar. Nessa situação teremos: $P_{11}^{4,4,2} = \dfrac{11!}{4!\cdot 4!\cdot 2!} = 34650$.

Discurso Tecnológico-Teórico: utilização da definição e do conceito de Permutação com Repetição para *n* objetos organizados em fila.

Livro 2: Observando, a seqüência de exercícios apresentada pelas autoras, deparamos com dois modelos distintos de exercícios. Desses dois modelos, um já foi analisado no livro 1, então, para não sermos redundantes nas análises, nos dedicaremos a analisar o ***Exemplo Modelo*** que não foi analisado até então.

Exemplo do Modelo 2: Considere os números que se obtêm permutando os algarismos de 566776. Quantos desses números são pares?

<u>Tarefa</u>: Determinar a quantidade de números pares que se obtêm com a permutação dos algarismos do número 566776. A tarefa, deste modelo de exercício, consiste em determinar a quantidade de filas que podem ser ordenadas, utilizando os algarismos do enunciado, sendo que o algarismo da "casa da unidade" deve ser 6.

<u>Técnica</u>: A técnica deste modelo de exercícios pode ser dividida em três estágios:

1º estágio: Fixar o algarismo 6 na "casa da unidade".

2º estágio: determinar o número de objetos a ser ordenado, ou seja, determinar o número de objetos que irá compor a fila. Neste caso temos 5 objetos para ordenar, sendo que dois desses objetos se repetem duas vezes.

3º estágio: ordenar cinco objetos restantes, ou seja, usar o conceito de Permutação com Repetição nos 5 objetos a ordenar. Nessa situação teremos: $P_5^{2,2} = \dfrac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$.

<u>Discurso Tecnológico-Teórico:</u> utilização da definição e do conceito de Permutação com Repetição para *n* objetos organizados em fila e, também, o Conceito do Princípio Fundamental da Contagem.

Livro 3: Observando, a seqüência de exercícios apresentada pelos autores, encontramos um único modelo distinto dos exercícios já analisados.

Exemplo do Modelo 3: Conclua que quando uma palavra de *n* letras é formada exclusivamente por 2 letras que se repetem n_1 vezes e n_2 vezes $(n_1 + n_2 = n)$, as fórmulas de permutação e combinação se equivalem.

<u>Tarefa</u>: Mostrar que a fórmula algébrica de Permutação Simples equivale à fórmula algébrica de Combinação. A tarefa, deste modelo de exercício, consiste em mostrar a equivalência entre duas fórmulas algébricas de contagem, ou seja, em determinados exercícios é possível utilizar-se de dois conceitos – Permutação com Repetição ou Combinação.

Técnica: A técnica deste modelo de exercícios pode ser dividida em quatro estágios:

1º estágio: escrever a fórmula algébrica da Combinação de n elementos dispostos em grupos de n_1 objetos. Neste caso temos: C_{n,n_1}.

2º estágio: desenvolver a fórmula algébrica de Combinação, para isso será necessário utilizar a definição de Combinação. Então temos: $\frac{n!}{n_1! \cdot (n-n_1)!}$.

3º estágio: substituir $n-n_1$ por n_2, pois pelo enunciado do problema temos que: $n_1+n_2=n$.

4º estágio: observar a fração algébrica obtida e concluir que essa fração é a definição algébrica corresponde à definição algébrica da fórmula da Permutação com Repetição.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Analisando pesquisas acadêmicas a respeito do livro didático, observando-o como ferramenta atuante na construção e manutenção da prática docente e, também, como instrumento efetivo de pesquisa para o aluno (podemos também conjecturar como elemento de pesquisa para o professor), torna-se relevante analisar como os conceitos estão estruturados e desenvolvidos, com o objetivo de entender parte do papel que o livro didático assume no ambiente escolar.

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) nos forneceu instrumentos para analisar como os conceitos matemáticos estão estruturados e, também, observar os modelos padrões de exercícios de contagem sugeridos pelos autores.

O processo de estudar análise combinatória expõe o aluno frente a um novo raciocínio, como também, a novos signos e significados. As análises realizadas neste trabalho evidenciam que esses signos são expressos, na maioria das vezes, por fórmulas algébricas tecnicistas, seguidas por seqüências de exercícios, nos quais, as técnicas de resoluções são repetitivas.

Notamos que os autores, com relação à seqüência de exercícios, modificam e alternam os enunciados dos problemas. Esse fator de mudança, modifica, às vezes, as tarefas a serem realizadas, mas as técnicas que permeiam as resoluções dos problemas conservam-se idênticas e repetitivas, não contribuindo para o crescimento do aluno.

Por essa razão, as técnicas apresentadas nos exercícios exigem apenas a aplicabilidade de fórmulas algébricas expostas, em grande parte das vezes, nos exemplos prontos e exibidos no texto do livro didático. Esses exemplos assumem, então, o papel de “receitas prontas”, pois, apresentam esquemas e estratégias de resoluções a serem seguidas.

Então, podemos concluir, com relação às técnicas analisadas nesses livros didáticos, que os alunos, apenas, manipulam os procedimentos, utilizando, para isso, algumas técnicas de resoluções que lhe são oferecidas de forma cabal, mas não são compreendidas de fato.

Esse processo de valorizar a aplicabilidade imediata de fórmulas algébricas configura o estudo da análise combinatória a um reducionismo de metodologias e conceitos, ou seja, conduz o aluno a resolver problemas de contagem, pela aplicação de “fórmulas certas” em problemas especifico.

Podemos também observar que a não valorização de outras técnicas de abordagem de resoluções de problemas, como por exemplo: a utilização da árvore de possibilidades, o uso da representação do diagrama de Venn, a enumeração dos agrupamentos, o uso da linguagem natural concomitantemente aos conceitos de contagem, etc., empobrecem e aviltam a construção do raciocínio combinatório.

Por outro lado, observamos, também, sugestões de bons exercícios, nos quais, é necessária a utilização de uma miscelânea de técnicas para executar a tarefa proposta. Mas esse modelo de exercício apresenta-se de forma rara e esporádica.

Vale observar que, o livro 1 foi o que apresentou a maior escassez de exercícios propostos, o livro 2 apresentou um erro conceitual com relação ao enunciado do Princípio Fundamental da Contagem e o livro 3 utiliza-se de uma linguagem excessivamente formal-matemática.

Para finalizar, podemos conjecturar que esse padrão de apresentar os conceitos de contagem utilizando-se apenas da aplicabilidade de fórmulas algébricas, de uma repetição de tarefas e técnicas, um reducionismo das metodologias e conceitos não contribuem para a construção do raciocínio combinatório e geram um padrão improdutivo da prática docente.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, Vol 2, Brasília: SEF/MEC. 2006.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: ArtMed, 2001.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoria antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Vol 19, nº 2, pp. 221-266, 1.999.

DANTE, I. R. **Matemática Contexto & Aplicação** Coleção do 1º ao 3º ano do Ensino Médio. São Paulo: Ática, 2004.

DINIZ, M. I.; SMOLE, K. S. **MATEMÁTICA** Coleção do 1º ao 3º ano do Ensino Médio. São Paulo: Saraiva, 2005.

GASCÓN, J. **La necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas.** Revista do programa de estudos de pós-graduação em educação matemática, p. 11-37, 2003.

IEZZI, G. et al. **Matemática Ciência e Aplicações**, Coleção do 1º ao 3º ano do Ensino Médio. São Paulo: Atual, 2004.

LOPES, J. de A. **Livro didático de matemática: Concepção seleção e possibilidades frente a descritores de análise e tendências em educação matemática.** São Paulo, 2000, 264f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2000.

MIGUEL, M. I. R. **Ensino e Aprendizagem do Modelo Poisson: uma experiência com modelagem.** São Paulo, 2005, 260f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.